Algebra

Tabliczki czterech działań arytmetycznych nad liczbami naturalnemi.

Dodawanie.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Odejmowanie.

odjemna

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
9	8	7	6	5	4	3	2	1		
8	7	6	5	4	3	2	1			
7	6	5	4	3	2	1				
6	5	4	3	2	1					
5	4	3	2	1						
4	3	2	1							
3	2	1								
2	1									
1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

odjemnik

Tabliczki czterech działań arytmetycznych nad liczbami naturalnemi.

Mnożenie.

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Dzielenie.

dzielna										
10	10	5	.	.	2	.	.	.	.	1
9	9	.	3	.	.	.	.	.	1	.
8	8	4	.	2	.	.	.	1	.	.
7	7	.	.	.	.	.	1	.	.	.
6	6	3	2	.	.	1	.	.	.	.
5	5	.	.	.	1	.	.	.	.	.
4	4	2	.	1	.	.	.	.	.	.
3	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.
2	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

d z i e l n i k

Tabliczki czterech działań arytmetycznych nad liczbami całkowitemi.

Dodawanie.

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
1	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
0	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
−1	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
−2	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
−3	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2
−4	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
−5	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5

Odejmowanie.

odjemna											
5	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
4	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1
3	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2
2	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3
1	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
0	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5
−1	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
−2	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7
−3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8
−4	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
−5	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10
	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5

o d j e m n i k

Tabliczki czterech działań arytmetycznych nad liczbami całkowitemi.

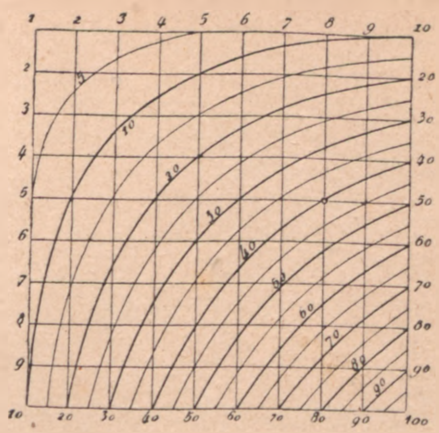
Mnożenie.

	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
5	−25	−20	−15	−10	−5	0	5	10	15	20	25
4	−20	−16	−12	−8	−4	0	4	8	12	16	20
3	−15	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9	12	15
2	−10	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10
1	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−1	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5
−2	10	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8	−10
−3	15	12	9	6	3	0	−3	−6	−9	−12	−15
−4	20	16	12	8	4	0	−4	−8	−12	−16	−20
−5	25	20	15	10	5	0	−5	−10	−15	−20	−25

Dzielenie.

dzielna \ dzielnik	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
5	−1	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{2}$	−5	·	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	1
4	$-\frac{4}{5}$	−1	$-\frac{4}{3}$	−2	−4	·	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$
3	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{4}$	−1	$-\frac{3}{2}$	−3	·	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
2	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	−1	−2	·	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$
1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−1	·	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
−1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	·	−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$
−2	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	·	−2	−1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$
−3	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	3	·	−3	$-\frac{3}{2}$	−1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{5}$
−4	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	2	4	·	−4	−2	$-\frac{4}{3}$	−1	$-\frac{4}{5}$
−5	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	5	·	−5	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	−1

Tabliczka mnożenia **Pouchét'a.**



Znalazłszy punkt, odpowiadający jednemu czynnikowi, na krawędzi górnej kwadratu, zaś punkt odpowiadający drugiemu — na krawędzi lewej, poprowadźmy przez pierwszy linię pionową, przez drugi — poziomą; punkt przecięcia tych dwóch linii odpowiada szukanemu iloczynowi.

Wszystkie punkty, odpowiadające iloczynom równym, są połączone liniami krzywemi, noszącemi nazwę hiperboli. Np. punkty, odpowiadające iloczynom: $4 \times 5 = 20$, $3 \times 6\frac{2}{3} = 20$, $7\frac{1}{2} \times 2\frac{2}{3} = 20$ i t. d., leżą na linii krzywej oznaczonej liczbą 20.

Pomiędzy liniami wykreślonemi dla iloczynów 5, 10, 15, 20, można wykreślić linie dla iloczynów pośrednich; tak np. dla iloczynów większych od 25 ale mniejszych od 30 dostalibyśmy hiperbole pomiędzy liniami oznaczonemi liczbami 25 i 30.

WSTĘP.

Czterech działań arytmetycznych nad liczbami całkowitemi uczymy się doświadczalnie zapomocą jakichbądź przedmiotów, i rezultaty układamy w odpowiednie tabliczki, których części każdy umie na pamięć; części pozostałe łatwo sobie wtedy odtworzyć. Takie tabliczki są podane na początku książki.

Łączenie kilku grup w jedną i oznaczanie ogólnej liczby przedmiotów w tej nowej grupie nazywamy *dodawaniem*; w szczególnym przypadku, gdy każda z grup danych zawiera jednakową liczbę przedmiotów, działanie nazywamy mnożeniem.

Dodawanie i mnożenie zawsze jest możliwe, ilekolwiek przedmiotów byłoby w danych grupach.

Odejmowanie, t. j. oznaczanie pozostałej liczby przedmiotów po wyłączeniu z danej grupy pewnej określonej liczby przedmiotów, oraz *dzielenie* danej grupy na grupy równe; można również przedstawić zapomocą tabliczek. W załączonych tabliczkach należy szukać odjemnej i dzielnej z boku, odjemnika i dzielnika u spodu.

Doświadczenie uczy, że *odejmowanie jest zawsze możliwe do wykonania, jeżeli odjemnik jest mniejszy od odjemnej i niemożliwe, jeżeli odjemnik jest większy od odjemnej.* To też w tabliczce odejmowania puste są wszystkie te miejsca, które odpowiadają odjemnikowi większemu od odjemnej. Wypadkiem, w którym odjemnik jest równy odjemnej, zajmiemy się później.

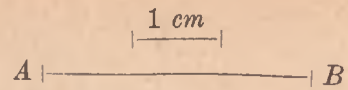
I w tabliczce dzielenia miejsca odpowiadające dzielnikowi większemu od dzielnej są niezajęte, ponieważ działanie to można tylko wtedy wykonać, jeżeli dzielnik jest mniejszy od dzielnej lub przynajmniej równy dzielnej. Jestto warunek konieczny, ale niedostateczny, podzielność jednej liczby przez drugą jest własnością szczególną tych dwóch liczb. To też widzimy, że rezultaty dzielenia są porozrzucane na pozór bezładnie na tabliczce, a pozostałe miejsca są puste.

Przypatrując się tym tabliczkom, możemy zrobić ciekawe spostrzeżenie, mianowicie, że *w tabliczkach dodawania, odejmowania i dzielenia rezultaty jednakowe są rozłożone wzdłuż linii prostych*, których położenie jednak w każdym z tych trzech przypadków jest inne. W tabliczce mnożenia tej prawidłowości nie dostrzegamy.

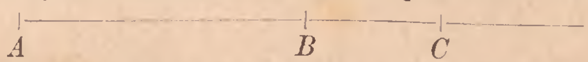
Mierzenie wielkości sprowadzamy do liczenia, przyczem przedmiotami, jakie w tym wypadku liczymy, są jednostki miary. Jednostki te dadzą się podzielić na części, i dlatego przy mierzeniu wprowadzamy liczby ułamkowe. *Liczby wyrażające wielkości, mogą więc być ułamkowe równie dobrze jak całkowite*, podczas kiedy w pierwszem znaczeniu mogły przyjmować tylko wartości całkowite. Dla odróżnienia nazywamy liczby, które poznaliśmy przy liczeniu, *liczbami naturalnemi.*

Oprócz liczb naturalnych i wprowadzonych w celu dogodniejszego mierzenia liczb ułamkowych, pożytecznie jest wprowadzić jeszcze nowy rodzaj liczb, jak to zobaczymy w następującem doświadczeniu.

Wyrysujmy odcinek linii prostej, t. j. część linii prostej ograniczoną dwoma punktami i przyjmijmy za jednostkę długości 1 centymetr. Punkty początkowy i końcowy odcin-

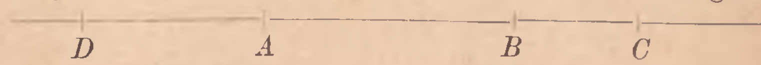


ka niech będą A i B. Biorąc 1 *cm* w otwór cyrkla, i odkładając tę długość od punktu A ku B tyle razy, ile to jest możliwem bez przekroczenia punktu B, zmierzymy długość odcinka $A\,B$, przyczem resztę mniejszą od 1 *cm* należy mierzyć np. dziesiątemi, setnemi, i t. d. częściami centymetra. Wydłużmy teraz linię prostą na prawo od B dowolnie daleko i obierzmy gdziekolwiek na tej linii punkt C. Mierząc dłu-



gość odcinka AC znajdziemy odległość punktu C od A. Jeżeli punkt C będzie się posuwał wzdłuż linii, będziemy otrzymywali coraz to nową liczbę, wyrażającą jego odległość, i odwrotnie, dla każdej liczby danej można znaleść taki punkt, którego odległość od A wyrazi się tą właśnie liczbą: należy tylko wskazaną liczbę jednostek długości odciąć na linii prostej, począwszy od punktu A.

Wydłużmy teraz daną linię na lewo od punktu A i obierzmy na tem przedłużeniu jakikolwiek punkt D. Odległość



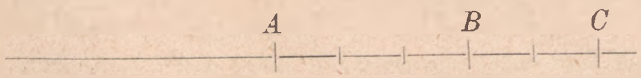
jego od A możemy zmierzyć tak samo jak poprzednio, z tą różnicą, że jednostki długości odcinać będziemy od A w kierunku odwrotnym; innemi słowami, przesuwamy ją od strony prawej ku lewej, nie od lewej ku prawej, jak poprzednio. Są więc dwa punkty na linii prostej mające od punktu A jedną i tę samą odległość. Ażeby odróżnić je od siebie, poprzedzamy liczby, przedstawiające odległości mierzone od prawej strony ku lewej znakiem —, tym samym, którego używamy przy odejmowaniu. Tak więc punkt, którego odległość od A jest 3*cm*, leży z prawej strony A; punkt, którego odległość od A jest — 3*cm*, leży z lewej strony tegoż punktu A.

Liczby opatrzone znakiem — nazywamy *liczbami ujemnemi*, w przeciwstawieniu do nich nazywamy liczby o których dotychczas mówiliśmy, *dodatniemi* i jeżeli chcemy zwrócić szczególną uwagę na to, że są dodatnie, piszemy czasami przed niemi znak $+$.

Sam punkt A stanowi granicę pomiędzy takimi punktami, które mają od A odległości dodatnie, i takimi, których odległości są ujemne. Jeżeli jakiś punkt, poruszający się po linii prostej, będzie w danej chwili w punkcie A, wtedy dla scharakteryzowania jego położenia mówimy, że odległość jego od A jest *zero* (0).

Przez wprowadzenie liczb ujemnych osiągnęliśmy, że każda liczba, bądź dodatnia, bądź ujemna, określa położenie jednego i tylko jednego punktu na linii prostej, jak to widać z załączonego rysunku.

Znaczenie, jakie nadaliśmy teraz znakowi —, da się w zupełności pogodzić z jego sposobem użycia w arytmetyce. Jeżeli mianowicie do odcinka AB, mającego np. 3 *cm* długości, chcemy dodać odcinek, którego długość jest 2 *cm*, wtedy



przesuwamy koniec odcinka z punktu B o 2 *cm* na prawo. Tak otrzymany punkt niech będzie C. Odwrotnie, jeżeli od odcinka AC chcemy odjąć długość 2 *cm*, wtedy przesuwamy koniec odcinka o takąż długość na lewo. Tym sposobem znak $+$ oznacza przesuwanie punktu w jedną stronę, znak — przesuwanie w stronę przeciwną. Wybór, który z dwóch kierunków czyli *zwrotów* linii przyjmiemy za dodatni, który za ujemny, zależy zupełnie od naszej woli.

Oprócz odległości spotykamy w naturze różne inne wielkości, które dogodnie jest przedstawiać za pomocą tych

dwóch rodzajów liczb. Do takich wielkości należy czas. Lata liczymy od narodzenia Chrystusa; opisując jednak zjawiska, które dawniej zaszły, liczymy lata od tejże samej chwili w porządku odwrotnym, możemy więc określać je za pomocą liczb ujemnych. Tak np. rok 45-ty przed narodzeniem Chrystusa można nazwać rokiem — 45-tym.

Ponieważ każdą wielkość można wyrazić zapomocą liczby, a każdej liczbie odpowiada, przy dowolnie obranej jednostce długości, jakiś odcinek linii prostej; można więc każdą wielkość przedstawić zapomocą odcinka. Takie przedstawienie na rysunku, czyli *graficzne*, bywa nieraz bardzo pożyteczne dla łatwiejszego zrozumienia zadania, będziemy go też nieraz używali.

I.

Główne znaki.

1. Algebra jest nauką, w której rozumujemy nad liczbami, za pomocą głosek, użytych do oznaczenia liczb, i pewnych znaków, użytych do oznaczenia tak działań wykonywanych nad temi liczbami, jako też i związków zachodzących pomiędzy niemi.

2. Liczby mogą być albo *znanemi*, albo też takiemi, których znaczenie należy dopiero znaleść, i które z tego powodu nazywają się *nieznanemi* lub *niewiadomemi*. Zazwyczaj pierwsze, t. j. *znane* lub *wiadome*, oznaczają się początkowemi głoskami alfabetu a, b, c i t. d., *niewiadome* zaś *ostatniemi* głoskami x, y, z. Nie jest to jednak prawidło niewzruszone i dlatego też nie potrzebuje być ściśle zachowywane. Liczby mogą być *całkowite* i *ułamkowe*. Poznaliśmy także liczby *ujemne*, ale z początku zajmować się będziemy tylko dodatniemi. Wyraz *ilość* niejednokrotnie używa się w tem samem znaczeniu, co i wyraz *liczba*; wyraz *całkowita* jest często używany zamiast *liczba całkowita*.

3. Uczący powinien się przyzwyczaić do używania głosek, oznaczających liczby i nauczyć się znaczenia znaków; dlatego też zaczynamy od wytłumaczenia najważniejszych znaków i objaśnienia ich użycia. *W pierwszych ośmnastu rozdziałach przez głoski oznaczać będziemy wyłącznie liczby naturalne*, później nadamy im szersze znaczenie. Przystępujący do uczenia się algebry, powinien już umieć zasady arytmetyki i rozumieć użycie najogólniejszych prawd, z któremi spotykamy się we wszystkich częściach matematyki, ta-

kich jak: *jeżeli równe ilości dodamy do równych, otrzymamy sumy równe* i t. p.

Prawdy takie jak powyższa, które stwierdzamy bezpośrednio, bez żadnego rozumowania, za pomocą codziennego doświadczenia, nazywamy *pewnikami* (axioma); prawdy i zdania zaś takie, które wyprowadzamy z pewników za pomocą pewnego szeregu rozumowań, nazywamy *twierdzeniami* (theorema).

4. Znak $+$ położony przed liczbą oznacza, że ta liczba ma być *dodaną*. Tak np. $a + b$ pokazuje, że liczba oznaczona przez b ma być dodaną do liczby oznaczonej przez a. Jeżeli a oznacza 9 a b oznacza 3, wtedy $a + b$ oznacza 12. Znak $+$ czyta się *więcej*; tym sposobem $a + b$ przeczytamy: *a więcej b*.

5. Znak $-$ położony przed liczbą pokazuje, że liczba ta ma być *odjętą*. Tak więc $a - b$ oznacza, że liczba oznaczona przez b ma być odjętą od liczby oznaczonej przez a. Jeżeli a oznacza 9, b zaś oznacza 3, wtedy $a - b$ oznacza 6. Znak $-$ nazywa się znakiem *mniej*, i $a - b$ wymawia się tak: *a mniej b*.

6. Podobnież $a + b + c$ oznacza, że mamy dodać b do a i następnie dodać c do tego co wypadnie; $a + b - c$ oznacza, że mamy dodać b do a i następnie odjąć c od wypadku; $a - b + c$ oznacza, że należy b odjąć od a i następnie do wypadku dodać c, nakoniec $a - b - c$ oznacza, że należy b odjąć od a, i następnie od tego co wypadnie odjąć c.

7. Znak $=$ oznacza, że liczby, pomiędzy któremi on znajduje się, są *równe*. Tak więc $a = b$ oznacza, że liczba przedstawiona przez a jest równą liczbie przedstawionej przez b. $a + b = c$ oznacza, że suma liczb przedstawionych przez a i przez b jest równą liczbie, którą przedstawia c, tak, że jeżeli np. a oznacza 9, b oznacza 3, wtedy c musi oznaczać 12. Znak $=$ nazywa się *znakiem równości*, i $a = b$ czyta się „*a równa się b*“ lub „*a jest równe b*“.

8. Znak $\times$ oznacza, że liczby, pomiędzy któremi on stoi, mają być przez siebie *pomnożone*. Tak np. $a \times b$ oznacza, że liczba, którą przedstawia a ma być pomnożoną przez liczbę, którą przedstawia b. Jeżeli a znaczy 9, b. zaś 3, wtedy $a \times b$ oznacza 27. Znak $\times$ nazywa się *znakiem mnożenia* i $a \times b$ czyta się „*a pomnożone przez b*“, lub krócej „*a przez b*“. Podobnież $a \times b \times c$ oznacza iloczyn liczb, które przedstawiają głoski a, b i c.

9. Jednakże znak mnożenia bardzo często opuszcza się dla krótkości; tym sposobem pisze się $a\,b$ zamiast $a \times b$ i ma toż samo znaczenie; pisze się także $a\,b\,c$ w miejsce $a \times b \times c$ i t. d.

Znak mnożenia nie może być opuszczonym, gdy liczby są wyrażone zwyczajnym sposobem za pomocą cyfr. Tak np. 45 nie może przedstawiać iloczynu z 4 przez 5, ponieważ 45 ma już inne, poprzednio mu nadane znaczenie, mianowicie *czterdzieści pięć*. Musimy przeto przedstawić iloczyn 4 przez 5 w inny sposób i wybieramy do tego sposób pisania 4×5. Niekiedy jednak punkt jest używany w miejsce znaku $\times$; w uważanym poprzednio przypadku możemy napisać $4 . 5$ zamiast 4×5. Czasami także pisze się punkt pomiędzy dwiema głoskami zamiast znaku $\times$: tak, że $a . b$ używa się zamiast $a \times b$. Lecz tutaj punkt jest zupełnie zbytecznym, gdyż $a\,b$ oznacza toż samo, co $a \times b$. Również ani punkt ani znak $\times$ nie jest potrzebny pomiędzy liczbą przedstawioną w zwykły sposób — cyframi i liczbą przedstawioną przez głoskę: tak np. $3\,a$ pisze się zamiast $3 \times a$ i ma toż samo znaczenie.

10. Znak : oznacza, że liczba która przed nim się znajduje ma być *podzieloną* przez liczbę znajdującą się za nim. I tak $a : b$ pokazuje, że liczba, oznaczona przez a, ma być podzieloną przez liczbę, oznaczoną przez b. Jeżeli a znaczy 8, a b znaczy 4, wtedy $a : b$ znaczy 2. Znak ten : nazywa się *znakiem dzielenia*, i $a : b$ czyta się tak: „*a podzielone przez b*“.

Jest jeszcze inny sposób oznaczania, że jedna liczba ma być podzieloną przez drugą; mianowicie: dzielna pisze się nad dzielnikiem i pomiędzy nimi kreśli się linijka. Tak np. $\frac{a}{b}$ używa się zamiast $a : b$ i ma zupełnie toż samo znaczenie.

11. Głoski alfabetu i znaki, których użycie już wytłumaczyliśmy lub które w dalszym ciągu spotkamy, nazywają się, razem wzięte, *symbolami algebraicznymi*, ponieważ ich właśnie używamy do przedstawienia liczb, nad któremi rozumujemy, działań, które na nich wykonywamy i związków, jakie między niemi istnieją. Każdy zbiór symbolów algebraicznych stanowi to, co nazywamy *wyrażeniem algebraicznem*.

12. Podajemy tutaj kilka przykładów jako ćwiczenie na użycie tych symbolów, które były objaśnione. W przykładach tych należy znaleść wartości liczebne niektórych wyrażeń algebraicznych.

Przypuśćmy że $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 5$, $e = 6$, $f = 0$.

Wtedy:

$$7\,a + 3\,b - 2\,d + f = 7 + 6 - 10 + 0 = 13 - 10 = 3.$$

$$2ab + 8\,bc - ae + df = 4 + 48 - 6 + 0 = 52 - 6 = 46.$$

$$\frac{4ac}{b} + \frac{10\,be}{cd} - \frac{de}{ac} = \frac{12}{2} + \frac{120}{15} - \frac{30}{3} = 6 + 8 - 10 = 14 - 10 = 4.$$

$$\frac{4c + 5e}{d - b} = \frac{12 + 30}{5 - 2} = \frac{42}{3} = 14.$$

PRZYKŁADY I.

Znaleść wartości liczebne następujących wyrażeń, jeżeli:

$a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$, $f = 0$:

1. $9\,a + 2\,b + 3c - 2\,f$.
2. $4\,e - 3\,a - 3\,b + 5\,c$.

3. $7ae + 3bc + 9d - af.$

4. $abcd + abce + abde + acde + bcde.$

5. $\frac{4a}{b} + \frac{9b}{c} + \frac{8c}{d} - \frac{5d}{e}.$

6. $\frac{12a}{bc} + \frac{6b}{cd} + \frac{20c}{de}.$

7. $7e + bcd - \frac{3bde}{2ac}.$

8. $\frac{a+c}{c-a} + \frac{b+d}{d-b} + \frac{c+e}{e-c}.$

9. $\frac{a+b+c+d+e}{e-d+c-b+a}.$

II.

Czynnik. Współczynnik. Potęga. Wyrazy.

13. Gdy pewna liczba jest iloczynem dwóch lub ilukolwiek liczb, wtedy każda z tych ostatnich nazywa się *czynnikiem* tego iloczynu. Tak np. $2 \times 3 \times 5 = 30$; i każda z liczb 2, 3 i 5 jest *czynnikiem* iloczynu 30. Albo też możemy uważać 30 jako iloczyn z dwóch czynników 2 i 15, lub jako iloczyn z dwóch czynników 6 i 5, albo jeszcze jako iloczyn z czynników 3 i 10. Podobnież $4ab$ możemy uważać jako iloczyn z dwóch czynników 4 i ab, lub też jako iloczyn z czynników $4a$ i b, albo jako iloczyn z dwóch czynników $4b$ i a; albo jeszcze jako iloczyn z trzech czynników 4, a i b.

14. Gdy liczba pewna jest iloczynem z dwóch czynników, wtedy każdy z tych czynników nazywa się *współczynnikiem* względem drugiego. Tak np. uważając $4ab$ za iloczyn z 4 i ab, 4 nazywamy współczynnikiem dla ab, również jak i ab możemy nazwać współczynnikiem dla 4; uważając znowuż $4ab$ jako iloczyn z $4a$ i z b, nazywamy $4a$ współczynnikiem dla b, zaś b współczynnikiem $4a$. W praktyce używać będziemy wyrazu współczynnik najczęściej w pierwszem tylko znaczeniu, t. j. uważając 4 jako współczynnik ab; w tym razie wszakże, dla tem dokładniejszego wyrażenia o czem mowa, nazywać będziemy 4 *współczynnikiem liczebnym.* Wogóle jeżeli jakikolwiek iloczyn składa się z jednego czynnika, wyrażonego *arytmetycznie*, t. j. za pomocą cyfr, i z drugiego czynnika wyrażonego *algebraicznie*, t. j. za pomocą jednej lub kilku głosek, wtedy pierwszy czynnik nazywa się *współczynnikiem liczebnym.*

15. Gdy wszystkie czynniki pewnego iloczynu są równe, wtedy iloczyn nazywa się *potęgą* tegoż czynnika. Tak np. 7×7 nazywa się *drugą potęgą* 7; $7 \times 7 \times 7$ nazywa się *trzecią potęgą* 7; $7 \times 7 \times 7 \times 7$ nazywa się *czwartą potęgą* 7 i t. d. Podobnież $a \times a$ nazywa się *drugą potęgą* a; $a \times a \times a$ nazywa się trzecią potęgą a; $a \times a \times a \times a$ nazywa się *czwartą potęgą* a; i t. d. Samo zaś a nazywa się *pierwszą potęgą* a.

16. Potęga krócej oznacza się w następujący sposób: zamiast pisać wszystkie równe czynniki, pisze się ten czynnik raz jeden i nad nim liczba pokazująca ile razy on miał być powtórzony. Tak np. a^2 oznacza $a \times a$; a^3 używa się dla oznaczenia $a \times a \times a$; a^4 ma toż samo znaczenie co i $a \times a \times a \times a$ i t. d. Zaś a^1 może być użyte do oznaczenia pierwszej potęgi a, to jest tegoż samego a; tym sposobem a^1 ma toż samo znaczenie co i a.

17. Liczba znajdująca się nad drugą liczbą, i pokazująca ile razy ta ostatnia ma być wziętą za czynnik dla utworzenia potęgi, nazywa się *wykładnikiem potęgi*, albo krócej *wykładnikiem.*

Tak np. w a^3, wykładnikiem jest 3; w a^n, n jest wykładnikiem.

18. Uczący się winien bardzo starannie rozróżniać *współczynnik* od *wykładnika.* Tak np. $3c$ oznacza *trzy razy* *po c*, tutaj 3 jest *współczynnikiem*. Lecz c^3 oznacza *c razy c* i ten iloczyn jeszcze powtórzony *razy c*. To jest:

$$3c = c + c + c$$
$$c^3 = c \times c \times c.$$

19. Potęga druga a, to jest a^2, nazywa się często *kwadratem a*, lub *a podniesionem do kwadratu*, potęga trzecia a, to jest a^3, nazywa się *sześcianem a*, lub *a podniesionem do sześcianu*. Dla wyższych potęg niema podobnych osobnych wyrazów; a^4 czyta się: *a podniesione do potęgi czwartej*, lub *a do potęgi czwartej*, lub krócej *a do czwartej*, albo nakoniec niekiedy (choć nie zupełnie poprawnie) *a cztery*.

20. Jeżeli wyrażenie algebraiczne, nie zawiera części połączonych z innemi częściami znakami + lub —, wtedy nazywa się ono wyrażeniem *pojedynczem lub jednomianem*. Jeżeli zaś wyrażenie algebraiczne zawiera części połączone z sobą znakami + lub —, wtedy nazywa się ono *złożonem* lub *wielomianem*, a te części jego, które są połączone znakami + lub — nazywają sią *wyrazami*.

I tak ax, $4bc$ i $5a^2c^2$ są jednomianami; $a^2 + b^3 - c^4$ jest wyrażeniem złożonem, i a^2, b^3 i c^4 są jego wyrazami.

21. Gdy wyrażenie składa się z dwóch wyrazów, wtedy nazywa się ono *dwumianem*, — gdy składa się z trzech wyrazów, nazywa się *trójmianem*; każde wyrażenie złożone z kilku wyrazów nazywa się wogóle *wielomianem*. Tak np. $2a + 3b$ jest dwumianem; $a - 2b + 5c$ jest trójmianem; a zaś $a - b + c - d - e$ może być nazwane wielomianem.

22. Liczba czynników algebraicznych nazywa się *stopniem* wyrazu. Tak np. a^2b^3c czyli $a \times a \times b \times b \times b \times c$ jest *szóstego stopnia*. Współczynnik liczebny przytem nie rachuje się wcale; $9a^3b^4$ i a^3b^4 są jednakowego stopnia, mianowicie siódmego.

Tym sposobem *stopień wyrazu* jest *sumą wykładników wszystkich jego czynników algiebraicznych*, przyczem należy pamiętać, że jeżeli nad głoską niema żadnego wykładnika,

wtedy należy porachować wykładnik 1, jak to było wskazanem w artykule 16.

23. Wyrażenie nazywa się *jednorodnem* gdy wszystkie jego wyrazy są tegoż samego stopnia. Tak np. $7a^3 + 3a^2b + 4abc$ jest wielomianem jednorodnym, gdyż każdy wyraz jest stopnia trzeciego.

Podajemy teraz kilka przykładów dalszych na wynalezienie wartości liczebnych wyrażeń algebraicznych.

Przypuśćmy że: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$, $f = 0$,

wtedy:

$b^2 = 4$; $b^3 = 8$; $b^4 = 16$; $b^5 = 32$.

$3b^2 = 3 \times 4 = 12$; $5b^3 = 5 \times 8 = 40$; $9b^5 = 9 \times 32 = 288$.

$e^a = 5^1 = 5$; $e^b = 5^2 = 25$; $e^c = 5^3 = 125$.

$a^2b^3 = 1 \times 8 = 8$; $3b^2c^2 = 3 \times 4 \times 9 = 108$.

$d^3 + c^2 - 7ab + f^2 = 64 + 9 - 14 + 0 = 59$.

$$\frac{3c^2 - 4c - 10}{c^3 - 2c^2 + 5c - 23} = \frac{27 - 12 - 10}{27 - 18 + 15 - 23} = \frac{5}{1} = 5.$$

$$\frac{e^3 + d^3}{e + d} - \frac{c^3 - a^3}{c - a} = \frac{125 + 64}{5 + 4} - \frac{27 - 1}{3 - 1} = \frac{189}{9} - \frac{26}{2} =$$
$$= 21 - 13 = 8.$$

PRZYKŁADY II.

Znaleść wartości liczebne następujących wyrażeń: jeżeli $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 4$; $e = 5$; $f = 0$.

1. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$.
2. $e^3 - d^3 + c^3 - b^3 + a^3$.
3. $abc^2 + bcd^2 - dea^2 + f^3$.
4. $e^4 + 6e^2b^2 + b^4 - 4e^3b - 4eb^3$.

5. $\frac{a^2 + b^2}{e} + \frac{c^2 + e^2}{b} + \frac{e^2 - d^2}{c}$.

6. $\frac{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$.

7. $\frac{d^c}{b^e}$;   8. $\frac{e^e + b^a}{c^b - b^c}$.

III.

Pozostałe znaki. Nawiasy.

24. Znak $>$ oznacza. „*większe od*“, znak zaś $<$ oznacza „*mniejsze od*“; tak np. $a > b$ wyraża, że liczba oznaczona przez a jest większą niż liczba oznaczona przez b; i znowuż $b < a$ wyraża, że liczba oznaczona przez b jest mniejszą od liczby oznaczonej przez a. W obu przypadkach otwór kąta jest zwrócony ku liczbie większej.

25. *Pierwiastkiem kwadratowym* danej liczby nazywa się taka liczba, której *kwadrat* jest właśnie równy liczbie danej. *Pierwiastek sześcienny* danej liczby jest to taka liczba, której *sześcian* jest równy liczbie danej. Podobnież *pierwiastkiem potęgi czwartej* danej liczby, jest liczba, której czwarta potęga jest równą danej liczbie i t. d.

Tak np. ponieważ $49 = 7^2$, więc pierwiastek kwadratowy 49 jest 7; i podobnie: jeżeli $a = b^2$, to b będzie pierwiastkiem kwadratowym a. Dalej: ponieważ $125 = 5^3$, przeto pierwiastek sześcienny 125 jest 5; i jeżeli $a = c^3$, wtedy c jest pierwiastkiem sześciennym a.

26. Pierwiastek kwadratowy z a oznacza się tak: $\sqrt{a}$, jakkolwiek może także być oznaczonym przez $\sqrt[2]{a}$. Pierwiastek sześcienny z a jest oznaczony tak: $\sqrt[3]{a}$. Pierwiastek potęgi czwartej z a oznacza się w ten sposób: $\sqrt{a}$. I tak dalej.

Więc: $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt[3]{8} = 2$.

Znak $\sqrt{\ }$ ma być pierwszą literą zmienioną wyrazu *radix*, oznaczającego *pierwiastek*.

27. Gdy dwie lub więcej liczb mają być przy pewnem działaniu uważane za jedną liczbę. wtedy zamykamy je w *nawias*. Tak np. przypuśćmy, że chcemy oznaczyć, iż suma dwóch liczb a i b ma być pomnożoną przez c: wtedy oznaczamy to w ten sposób: $(a + b) \times c$, lub $[a + b] \times c$; lub prościej $(a + b)\,c$ lub $[a + b]\,c$; w każdem z tych wyrażeń cała suma $a + b$ ma być pomnożoną przez c. Gdybyśmy opuścili nawias, mielibyśmy $a + bc$, i w tem wyrażeniu *tylko* b ma być pomnożone przez c i wypadek dodany do a. Podobnie $(a + b - c)\,d$ oznacza, że cały wypadek $a + b - c$ ma być pomnożony przez d; gdybyśmy zaś opuścili nawias, wtedy mielibyśmy $a + b - cd$, i w tem wyrażeniu *tylko* c ma być pomnożone przez d i wypadek odjęty od $a + b$.

Również $(a - b + c) \times (d + e)$ oznacza, że wypadek $a - b + c$ ma być pomnożony przez wypadek z $d + e$. To działanie może być oznaczone prosto w ten sposób $(a - b + c)$ $(d + e)$, podobnie jak $a \times b$ było skrócone na ab.

Podobnież $\sqrt{\ }(a + b + c)$ oznacza, że należy najprzód znaleść wypadek z działania wyrażonego przez $a + b + c$, i następnie znaleść pierwiastek kwadratowy z tego wypadku.

Podobnież $(ab)^2$ oznacza $ab \times ab$, równie jak $(ab)^3$ oznacza $ab \times ab \times ab$.

Podobnie jeszcze $(a + b - c) : (d + e)$ oznacza, że wypadek wyrażony przez $a + b - c$ ma być podzielonym przez wypadek wyrażony przez $d + e$.

28. Niekiedy zamiast nawiasu kreśli się linia nad temi liczbami, które mają być uważane jako jedna liczba. Tak np. $\overline{a - b + c} \times \overline{d + e}$ używa się zamiast $(a - b + c) \times (d + e)$. Linia nakreślona i zastępująca nawias nazywa się *vinculum* [1]). Podobnie wyrażenie $(a+b-c):(d+e)$ może być tak napisane $\dfrac{a+b-c}{d+e}$;

tutaj linia nakreślona pomiędzy $a+b-c$ i $d+e$ zastępuje nawiasy.

29. W tem co poprzedza objaśniliśmy wszystkie znaki używane w algebrze. Należy tu jeszcze zauważyć, że w wielu przypadkach wyraz *znak* używa się specyalnie dla oznaczenia dwóch znaków $+$ i $-$; tak np. w wyrażeniu prawidła na odejmowanie mówić będziemy o *zmianie znaków*, rozumiejąc pod tem znaki $+$ i $-$; podobnież w mnożeniu i dzieleniu mówić będziemy o *prawidle znaków*, rozumiejąc pod tem prawidło odnoszące się do znaków $+$ i $-$.

30. Podamy tutaj kilka nowych jeszcze przykładów na wynajdywanie wartości liczebnych wyrażeń:

Przypuśćmy, że $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=5$, $e=8$. Wtedy:

$$\sqrt{2b+4c}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4;$$

toż samo można inaczej napisać tak:

$$\sqrt{\ }(2b+4c)=\sqrt{\ }(4+12)=\sqrt{\ }(16)=4.$$

$$\sqrt[3]{4c-2b}=\sqrt[3]{12-4}=\sqrt[3]{8}=2.$$

$$e\sqrt{2b+4c}-(2d-b)\sqrt[3]{4c-2b}=8\times 4-8\times 2=32-16=16.$$

$$\sqrt{(e-b)(2e-5b)}=\sqrt{(8-2)(16-10)}=\sqrt{6\times 6}=6.$$

$$[(e-d)(b+c)-(d-c)(c+a)]\,(a+d)=[3\times 5-2\times 4]\,6=(15-8)\,6=7\times 6=42.$$

[1]) Możnaby ją nazwać po polsku *kreską*, jak to robi Śniadecki, gdyby zaszła tego potrzeba.

$$\sqrt[3]{c^3+3c^2b+3cb^2+b^3}:\sqrt{a^2+b^2-2ab}=$$
$$=\sqrt[3]{27+54+36+8}:\sqrt{1+4-4}=\sqrt[3]{125}:1=5.$$

PRZYKŁADY III.

Znaleść wartości liczebne następujących wyrażeń algebraicznych, wiedząc że:

$$a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=5,\ e=8:$$

1. $a(b+c)$; 2. $c(e-d)$.
3. $b^2(a^2+e^2-c^2)$; 4. $\dfrac{a^2+c^2+d^2}{a^2+b^2}$;
5. $\sqrt{2b+4d+5e}$;
6. $(a+2b+3c+5e-4d)(6e-5d-4c-3b+2a)$
7. $(3d^2-7c^2)^2$;
8. $e-[\sqrt{e+1}+2]+(e-\sqrt[3]{e})\sqrt{e-4}$.
9. $\sqrt[3]{c^3-3c^2a+3ca^2-a^3}:\sqrt{b^2+c^2-2bc}$.

IV.

Zmiana porządku wyrazów. Wyrazy podobne.

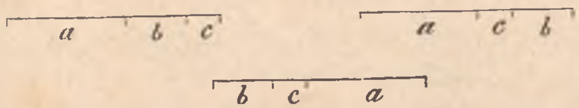
31. Gdy wszystkie wyrazy jakiegokolwiek wyrażenia algebraicznego są połączone znakiem $+$, wtedy obojętną jest rzeczą w jakim *porządku* są one napisane: tak np. $5+7$ i $7+5$ dają tenże sam wypadek, mianowicie 12. Również $a+b$ i $b+a$ dają tenże sam wypadek, mianowicie sumę tych liczb, które są przedstawione głoskami a i b. Fakt ten możemy wyrazić algebraicznie w ten sposób:

$$a+b=b+a.$$

I podobnie:

$$a+b+c=a+c+b=b+c+a.$$

Ażeby przedstawić to *graficznie*, odcinamy na linii prostej kolejno a, potem b, potem c; na drugiej prostej układamy te odcinki w porządku a, c, b, na trzeciej wreszcie b, c, a. Wszystkie trzy otrzymane odcinki okażą się równymi:



32. Gdy wyrażenie składa się z pewnej liczby wyrazów, poprzedzonych znakiem $+$ i pewnej liczby wyrazów, poprzedzonych znakiem $-$, wtedy możemy napisać najprzód pierwsze wyrazy w takim porządku, w jakim nam się spodoba i następnie drugie wyrazy, także w takim porządku, w jakim chcemy. Jest to widoczne z ogólnych zasad arytmetyki. Tak naprzykład:

$$7+8-2-3=8+7-2-3=7+8-3-2=8+7-3-2.$$

$$a+b-c-e=b+a-c-e=a+b-e-c=b+a-e-c.$$

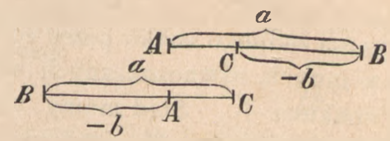
33. W niektórych przypadkach możemy zmienić dalej jeszcze porządek wyrazów, mieszając wyrazy, które są poprzedzone znakiem $-$. Tak np. przypuszczając, że a równa się 10, b jest równe 6, a c jest równe 5, mamy:

$$a+b-c=a-c+b=b-c+a;$$

gdyż w każdym razie otrzymujemy na wypadek 11.

Lecz przypuśćmy, że a jest równe 2, b jest równe 6, a c równa się 5; wtedy wyrażenie $a-c+b$ przedstawia pewną trudność, gdyż w niem wypada odjąć większą liczbę od mniejszej, mianowicie 5 od 2. Przyjmiemy tutaj, że takie wyrażenie jak $a-c+b$, gdy c jest większe od a, ma toż samo znaczenie co i $a+b-c$. Na teraz nie będziemy jeszcze używać takiego wyrażenia jak $a+b-c$ w innem znaczeniu, jak tylko w takiem gdy c jest mniejsze aniżeli $a+b$; tym sposobem

$a+b-c$ nie przedstawia żadnej trudności. Podobnież uważać będziemy $-b+a$ jako mające toż samo znaczenie, co i $a-b$. Ilustrują to następujące rysunki:



Czy od a *odetniemy* b, czy też do $-b$ *dodamy* odcinek a, zawsze otrzymamy jedną i tę samą długość AC.

34. Tym sposobem wartość liczebna wyrażenia algebraicznego pozostaje bez zmiany, jakikolwiek byłby porządek wyrazów, które je składają. Wypływa to, jak widzieliśmy, w części z naszych pojęć o dodawaniu i odejmowaniu, w części zaś z *umowy*: jakie znaczenie należy przypisywać wyrażeniu algebraicznemu, do którego ściśle biorąc, nasze zwykłe pojęcia arytmetyczne zastosować się nie dadzą.

35. Często nam wypadnie, podobnie, jak to miało miejsce w art. 32, rozróżniać te wyrazy w wyrażeniu algebraicznem, które są poprzedzone znakiem $+$, od tych wyrazów, które są poprzedzone znakiem $-$; i z tego powodu następujące określenie zostało przyjętem: Te wyrazy, które w wyrażeniu algebraicznem są poprzedzone znakiem $+$ nazywają się wyrazami *dodatnimi*; te zaś wyrazy, które są poprzedzone znakiem $-$, nazywają się wyrazami *ujemnymi*, zgodnie z tem, co było powiedziane we wstępie o wielkościach dodatnich i ujemnych.

36. Oczywiście może się przytrafić w wyrażeniu algebraicznem taki wyraz, który *nie jest poprzedzony żadnym znakiem*; takim jest mianowicie wyraz pierwszy. Taki wyraz *zalicza się zawsze do wyrazów dodatnich*, to jest uważa się tak, jak gdyby przed nim znajdował się znak $+$. Jeżeliby w porządku wyrazów wielomianu wprowadzono taką zmianę, że wyraz, który stał z początku na pierwszem miejscu i nie był poprzedzony żadnym znakiem, zajął następnie inne miejsce, w takim razie przed nim należy napisać znak $+$. Naprzykład:

$$a + b - c = b + a - c = b - c + a;$$

tutaj wyraz a nie ma żadnego znaku przed sobą w pierwszem wyrażeniu, lecz w innych, równoznacznych wyrażeniach jest on poprzedzony znakiem $+$. Stąd mamy następujący ważny dodatek do określenia w art. 35: *jeżeli wyraz nie ma przed sobą żadnego znaku, wtedy należy się przed nim domyślać znaku* $+$.

37. Wyrazy nazywają się *podobnymi* wtedy, gdy albo niczem się nie różnią od siebie, albo też gdy się różnią tylko swoimi współczynnikami liczebnymi; w przeciwnym razie nazywają się *niepodobnymi.* I tak: a, $4a$, $7a$ są wyrazami podobnymi; a^2, $5a^2$ i $9a^2$ są wyrazami podobnymi ab, $3ab$, $8ab$ są również podobne; lecz a^2, ab i b^2 są wyrazami niepodobnymi.

38. Wyrażenie, które zawiera wyrazy podobne, może być uproszczone. Tak np. uważmy wyrażenie:

$$6a - a + 3b + 5c - b + 3c - 2a;$$

na zasadzie art. 33, to wyrażenie jest równoznaczne z wyrażeniem:

$$6a - a - 2a + 3b - b + 5c + 3c.$$

Lecz $6a - a - 2a = 3a$; gdyż jakąkolwiekby a oznaczało liczbę, zawsze jeżeli od $6a$ odejmiemy a pozostanie $5a$, jeżeli zaś od $5a$ odejmiemy $2a$, pozostanie $3a$. Podobnież $3b - b = 2b$ i $5c + 3c = 8c$. Tym sposobem powyższe wyrażenie może być przedstawione w prostszej postaci:

$$3a + 2b + 8c.$$

Inny przykład: weźmy pod uwagę wyrażenie $a - 3b - 4b$. Jest ono równe $a - 7b$. Gdyż jeżeli od pewnej liczby a mamy odjąć $3b$, a następnie od pozostałej reszty odjąć jeszcze $4b$, wtedy oczywiście otrzymamy ten sam wypadek za pomo-

cą jednego działania, odejmując $7b$ od a; wypływa to z pierwszych zasad arytmetyki. Więc:

$$a - 3b - 4b = a - 7b.$$

39. Możemy teraz objaśnić znaczenie takiego wyrażenia, jak następujące:

$$-3b - 4b = -7b.$$

Nie możemy odjąć $3b$ od niczego i następnie odjąć $4b$ od pozostałości, tak, że powyższe wyrażenie nie jest zrozumiałem samo przez się, będąc oddzielone od reszty pewnego zdania algebraicznego, w którem może się ono przytrafić. Lecz może być ono wytłumaczone w taki sposób: jeżeli w ciągu jakiegokolwiek działania algebraicznego mamy odjąć $3b$ od pewnej liczby, a następnie odjąć $4b$ od reszty, wtedy zamiast tych dwóch działań możemy odrazu odjąć $7b$.

Jeżeli jednak wyrażenie dane stosuje się do wielkości, którym można nadawać wartości ujemne, np. do odległości, wtedy nabiera ono znaczenia bez względu na to, czy wykonywamy nad nim jakiekolwiek dalsze działanie, czy też nie.

40. Upraszczanie wyrażeń przez łączenie wyrazów podobnych, jest istotną częścią działań dodawania i odejmowania w algebrze, jak zobaczymy to w dwóch następnych rozdziałach.

Uczący się powinien zapamiętać, że podług naszych określeń następujące wyrażenia są równoznaczne z prostym symbolem a:

$$a^1;\ 1 \times a;\ a \times 1;\ \frac{a}{1};$$

$$+a^1;\ +1 \times a;\ +a \times 1;\ +\frac{a}{1}.$$

PRZYKŁADY IV.

Znaleść wartości liczebne następujących wyrażeń: jeżeli $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$:

1. $(a+b)(b+c)-(b+c)(c+d)+(c+d)(d+e)$.

2. $\frac{4a+3b}{b+c}-\frac{4c+3d}{b+d}+\frac{5d+4e}{a+d+e}$.

3. $(a-2b+3c)^2-(b-2c+3d)^2+(c-2d+3e)^2$.

4. $\frac{a^4-4a^3c+6a^2c^2-4ac^3+c^4}{b^4-4b^3c+6b^2c^2-4bc^3+c^4}$.

5. $5a^2+3ab-2b^2-ab+9b^2-2ab-7b^2$.

6. $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}-\frac{b^2+2bc+c^2}{b+c}+\frac{c^2+2cd+d^2}{c+d}$.

7. $\sqrt{e^2+d^2+c^2-a^2}$. 8. $\sqrt[4]{2b^2+c^2-a}$.

V.

Dodawanie.

41. W dodawaniu mogą się przytrafić trzy przypadki: I. Gdy wszystkie wyrazy dane do dodania są podobne i mają ten sam znak; II. Gdy wyrazy wszystkie są podobne, lecz nie wszystkie mają ten sam znak; III. Gdy nie wszystkie wyrazy są podobnymi. Rozbierzemy trzy te przypadki kolejno.

42. I. *Aby dodać wyrazy podobne, mające ten sam znak, należy dodać ich współczynniki liczebne, napisać przed sumą znak wspólny; a za nią głoski wchodzące do wszystkich wyrazów:*

Naprzykład:

$$6a+3a+7a=16a,$$
$$-2bc-7bc-9bc=-18bc.$$

W pierwszym przykładzie $6a$ znaczy toż samo co i $+6a$, $16a$ zaś toż samo co $+16a$. (Art. 36).

43. II. *Aby dodać wyrazy podobne, nie mające jednakowych znaków, należy dodać wszystkie współczynniki liczebne dodatnie, następnie oddzielnie dodać wszystkie współczynniki liczebne ujemne; odjąć od większej sumy mniejszą i przed różnicą napisać znak sumy większej, a za nią napisać wszystkie głoski, wchodzące do wyrazów.*

Naprzykład:

$$7a-3a+11a+a-5a-2a=19a-10a=9a.$$
$$2bc-7bc-3bc+4bc+5bc-6bc=11bc-16bc=-5bc.$$

44. III. Aby dodać wyrażenia, składające się nie z samych tylko wyrazów podobnych: *należy najprzód dodać wyrazy podobne na zasadzie prawideł podanych w poprzednich przypadkach i następnie dopisać pozostałe wyrazy każdy ze swoim właściwym znakiem.*

Naprzykład, dodać:

$$4a+5b-7c+3d;\ 3a-b+2c+5d;\ 9a-2b-c-d,$$
$$\text{i } -a+3b+4c-3d+e.$$

Dogodną jest rzeczą przy podobnem dodawaniu ułożyć wyrazy w kolumny tak, że wyrazy podobne znajdują się w jednej kolumnie. Czyniąc to w powyższym przykładzie, będzie:

$$\begin{array}{rrrrr} 4a & +5b & -7c & +3d & \\ 3a & -b & +2c & +5d & \\ 9a & -2b & -c & -d & \\ -a & +3b & +4c & -3d & +e \\ \hline 15a & +5b & -2c & +4d & +e. \end{array}$$

Tutaj wyrazy $4a$, $3a$, $9a$ i $-a$ są podobne, suma współczynników dodatnich jest 16; jeden wyraz jest ujemny, mianowicie $-a$, wartość jego współczynnika jest 1. Różnica pomiędzy 16 i 1 jest 15; tym sposobem otrzymujemy $+15a$ z tych wyrazów podobnych; znak $+$ może być opuszczonym, na zasadzie art. 36. Podobnież otrzymujemy $5b-b-2b+3b=5b$. I tak dalej.

45. W następujących przykładach wyrazy są już odpowiednio ustawione w kolumnach:

$$
\begin{array}{rrrr}
x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & & a^2 + ab + b^2 - c \\
4x^3 + 7x^2 + x - 9 & & 3a^2 - 3ab - 7b^2 \\
-2x^3 + x^2 - 9x + 8 & & 4a^2 + 5ab + 9b^2 \\
-3x^3 - x^2 + 10x - 1 & & a^2 - 3ab - 3b^2 \\
\hline
9x^2 - x - 1 & & 9a^2 \qquad - c.
\end{array}
$$

W pierwszym przykładzie, w pierwszej kolumnie mamy $x^3 + 4x^3 - 2x^3 - 3x^3$, to jest $5x^3 - 5x^3$, czyli zero; tego rodzaju wypadek wyrażamy zwykle mówiąc, że *wyrazy które zawierają x^3 wzajemnie się znoszą.*

Podobnież w drugim przykładzie wyrazy, zawierające ab znoszą się wzajemnie, jak również i wyrazy, które zawierają b^2.

$$
\begin{array}{r}
7x^2 - 3xy \qquad\qquad + x \qquad \\
3x^2 \qquad\quad - y^2 + 3x - y \\
-2x^2 + 4xy + 5y^2 - x - 2y \\
- 7xy - y^2 + 9x - 5y \\
4x^2 \qquad\quad + 4y^2 - 2x \qquad \\
\hline
12x^2 - 6xy + 7y^2 + 10x - 8y.
\end{array}
$$

PRZYKŁADY V.

Dodać następujące wyrażenia:

1. $3a - 2b$, $4a - 5b$, $7a - 11b$, $a + 9b$.
2. $4x^2 - 3y^2$, $2x^2 - 5y^2$, $-x^2 + y^2$, $-2x^2 + 4y^2$.
3. $x - 4a + b$, $3x + 2b$, $a - x - 5b$.
4. $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$, $a + b - c$.
5. $a - 2b + 3c - 4d$, $3b - 4c + 5d - 2a$, $5c - 6d + 3a - 4b$, $7d - 4a + 5b - 4c$.

6. $x^4 - 2x^3 + 3x^2$, $x^3 + x^2 + x$, $4x^4 + 5x^3$, $2x^2 + 3x - 4$, $-3x^2 - 2x - 5$.
7. $2ab - 3ax^2 + 2a^2x$, $12ab + 10ax^2 - 6a^2x$, $-8ab + ax^3 - 5a^2x$.
8. $x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - x^2z$,
$x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz$,
$x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$.

VI.

Odejmowanie.

46. Przypuśćmy, że mamy odjąć $7 + 3$ od 12; wypadek będzie ten sam, jeżeli odejmiemy najprzód 7 od 12, a następnie od reszty odejmiemy 3; to jest otrzymany wypadek będzie: $12 - 7 - 3$.

Tym sposobem:

$$12 - (7 + 3) = 12 - 7 - 3.$$

Tutaj $7 + 3$ zamykamy w nawias, gdyż mamy odjąć *całą sumę* $7 + 3$ od 12; patrz art. 27.

Podobnież:

$$20 - (5 + 4 + 2) = 20 - 5 - 4 - 2.$$

Przypuśćmy dalej, że mamy odjąć $b + c$ od a; wypadek będzie ten sam, jak gdybyśmy najprzód odjęli b od a, a następnie c od reszty; to jest wypadek szukany będzie: $a - b - c$.

Tym sposobem: $a - (b + c) = a - b - c$.

I tutaj $b + c$ zamykamy w nawias, w pierwszem wyrażeniu, gdyż mamy odjąć całkowitą sumę $b + c$ od a.

Podobnież:

$$a - (b + c + d) = a - b - c - d.$$

Wyrazy *odjemna* i *odjemnik* używają się w algebrze w tem samem znaczeniu, co i w arytmetyce.

47. Przypuśćmy teraz, że mamy odjąć 7 — 3 od 12. Jeżeli 7 odejmiemy od 12, wtedy otrzymamy 12—7; ale wtedy odjęliśmy zbyt wiele od 12, gdyż mieliśmy odjąć nie 7, lecz 7 zmniejszone o 3. A zatem otrzymany wypadek należy nam powiększyć o 3; i tym sposobem otrzymamy:

$$12 - (7 - 3) = 12 - 7 + 3.$$

Podobnież:

$$12 - (7 + 3 - 2) = 12 - 7 - 3 + 2.$$

Przypuśćmy dalej, że mamy odjąć $b - c$ od a. Jeżeli odejmiemy b od a, wtedy otrzymamy $a - b$; lecz wtedy odjęliśmy zbyt wiele od a, gdyż mieliśmy odjąć nie b, ale b zmniejszone o c. Wypadek otrzymany należy zatem powiększyć o c, i tym sposobem otrzymamy:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

W podobny sposób:

$$a - (b + c - d) = a - b - c + d.$$

48. Ostatni przykład:

$$a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

pokazuje nam, że jeżeli $b + c - d$ odejmiemy od a, wtedy na wypadek otrzymamy $a - b - c + d$. Widzimy tutaj, że w wyrażeniu, które należało odjąć, znajduje się wyraz $-d$, w otrzymanym zaś wypadku znajduje się odpowiedni wyraz $+d$, również w tym samym odjemniku znajduje się wyraz $+c$, w wypadku odpowiedni mu wyraz $-c$; i nakoniec w odjemniku mamy wyraz b, a w otrzymanej reszcie znajduje się wyraz $-b$.

Z tego i z innych przykładów, podanych w dwóch poprzednich artykułach, wyciągamy następujące prawidło na odejmowanie: *należy zmienić znaki na przeciwne w wyrazach odjemnika i następnie wszystkie wyrazy tak odjemnej jak i odjemnika dodać.*

Naprzykład: od $4x - 3y + 2z$ odjąć: $3x - y + z$. W tym celu należy we wszystkich wyrazach odjemnika, t. j. w $3x - y + z$ zmienić znaki na przeciwne; będzie: $-3x + y - z$, i następnie dodać do $4x - 3y + 2z$; otrzymamy:

$$4x - 3y + 2z - 3x + y - z = x - 2y + z.$$

Od $3x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 7x + 5$ odjąć $2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x - 7$. Należy zmienić we wszystkich wyrazach odjemnika znaki na przeciwne i następnie postępować jak przy dodawaniu; mieć będziemy:

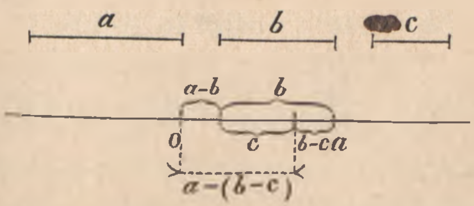
$$\begin{array}{r} 3x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 7x + 5 \\ \pm 2x^4 \mp 2x^3 \pm 5x^2 \mp 6x \mp 7 \\ \hline x^4 + 7x^3 - 11x^2 - x + 12. \end{array}$$

Uczący się powinien z początku wykonywać wszystkie działania w zupełności, tak jak to pokazano wyżej; lecz stopniowo powinien przyzwyczaić się do wynalezienia ostatecznego wypadku bez rzeczywistej zmiany znaków, a dokonywając te zmiany w pamięci.

49. Widzieliśmy że:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

A zatem wyrazowi $-c$ odjemnika odpowiada wyraz $+c$ reszty. Jeżeli a, b, c, oznaczają długości odcinków linii prostej, wyrażone w jakichkolwiek jednostkach, wtedy działanie powyższe przedstawi się na rysunku jak następuje:



Można więc albo znaleść naprzód $b - c$ i odciąć od a, albo też odciąć tylko b, a do odcinka jaki pozostanie, t. j.

$a-b$ dodać jeszcze c. I wogóle *przez odejmowanie odcinka ujemnego* — c *rozumieć będziemy dodawanie odcinka dodatniego* $+c$, co można wyrazić w ten sposób: $-(-c)=+c$. Z tego powodu, jeżeli spotkamy się z zadaniem tego rodzaju: od a odjąć $-c$; to za wypadek przyjmiemy $a+c$. Objaśnić to możemy jeszcze w podobny sposób jak w artykule 39, uważając, że podobne działania mają znaczenie nie same przez się, ale tylko w związku z innemi częściami pewnego działania algebraicznego.

Można tutaj jeszcze dodać kilka uwag, dopomagających do lepszego zapamiętania otrzymanych wypadków, i zarazem, być może, do zrozumienia przyczyn, dla których działania w ten sposób się wykonywają.

I tak: możemy naprzykład powiedzieć, że: $a=a+c-c$; skąd wypada, że jeżeli $-c$ odejmiemy od a, pozostanie $a+c$.

Musimy tu jeszcze zwrócić uwagę na to, że wyrazy *dodawanie* i *odejmowanie* nie zupełnie toż samo mają znaczenie w algebrze, co i w arytmetyce. W arytmetyce dodawanie zawsze pociąga za sobą *powiększenie*, odejmowanie zaś — *zmniejszenie*; lecz w algebrze po dodaniu -3 do 5 otrzymamy *sumę algebraiczną* 2; po odjęciu zaś -3 od 5 otrzymamy *różnicę algebraiczną* 8.

PRZYKŁADY VI.

1. Od $7a+14b$ odjąć $4a+10b$.
2. Od $6a-2b-c$ „ $2a-2b-3c$.
3. Od $7x^2-8x-1$ „ $5x^2-6x+3$.
4. Od $2x^2-2ax+3a^2$ odjąć x^2-ax+a^2.
5. Od $7x^3-2x^2+2x+2$ odjąć $4x^3-2x^2-2x-14$ i od reszty odjąć $2x^3-8x^2+4x+16$.

VII.

Nawiasy.

50. Z powodu wielkiego znaczenia i częstego użycia nawiasu w algebrze, konieczną jest rzeczą aby uczący się znał dokładnie prawidła, odnoszące się do jego użycia, i dla tego też podajemy je poniżej.

Gdy wyrażenie wzięte w nawias jest poprzedzone znakiem $+$, *wtedy nawias może być bez żadnej zmiany opuszczony.*

Gdy przed nawiasem, zamykającym wyrażenie algebraiczne, znajduje się znak $-$, *wtedy nawias może być opuszczony, ale przy jednoczesnej zmianie znaków na przeciwne przy wszystkich wyrazach, znajdujących się wewnątrz nawiasu.*

Tak naprzykład:

$$a-b+(c-d+e)=a-b+c-d+e.$$
$$a-b-(c-d+e)=a-b-c+d-e.$$

Drugie prawidło już było objaśnione w art. 48; jest to właściwie *prawidło na odejmowanie.* Pierwsze prawidło może być objaśnione w podobnyż sposób.

51. W szczególności uczący się powinien zwrócić uwagę na następujące wyrażenia:

$$+(-d)=-d;\quad -(-d)=+d;$$
$$+(+e)=+e;\quad -(+e)=-e.$$

Przyjmiemy je tutaj jako prawidła, które do pewnego stopnia mogą być objaśnione tak, jak w art. 39.

52. Mogą się przytrafić wyrażenia, zawierające więcej niż jedną parę nawiasów; nawiasy te mogą być kolejno znoszone za pomocą prawideł poprzednich, *zaczynając od zniesienia nawiasu wewnętrznego.* Tak naprzykład:

$$a+[b+(c-d)]=a+[b+c-d]=a+b+c-d,$$
$$a+[b-(c-d)]=a+[b-c+d]=a+b-c+d,$$
$$a-[b+(c-d)]=a-[b+c-d]=a-b-c+d,$$
$$a-[b-(c-d)]=a-[b-c+d]=a-b+c-d.$$

Podobnież:

$$a-[b-\{c-(d-e)\}]=a-[b-\{c-d+e\}]=a-$$
$$-[b-c+d-e]=a-b+c-d+e.$$

Widzimy z tych przykładów, że dla uniknięcia zamieszania pomiędzy rozmaitemi parami nawiasów, dajemy każdej parze inny *kształt*. Czasami w tym samym celu piszą się nawiasy tego samego kształtu, lecz różnej *wielkości*.

Linijka, napisana nad wyrażeniem algebraicznem, może zastąpić nawias, patrz art. 28. Tak naprzykład:

$$a-[b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]=a-[b-\{c-(d-e+f)\}]=$$
$$=a-[b-\{c-d+e-f\}]=a-[b-c+d-e+f]=$$
$$=a-b+c-d+e-f.$$

53. Zalecamy uczącemu się znosić nawiasy zawsze w porządku wskazanym w powyższym paragrafie; mianowicie przez usunięcie naprzód najbardziej wewnętrznego nawiasu, następnie przez usunięcie najbardziej wewnętrznego z pozostałych i t. d. Możemy jednak zmienić ten porządek: lecz jeżeli znosimy nawias, zawierający wewnątrz inne wyrażenie wzięte w nawias, wtedy *w tem ostatniem wyrażeniu nie należy robić żadnej zmiany w znakach*. Wyrażenie to bowiem musi być uważane jako jeden wyraz. I tak:

$$a+[b+(c-d)]=a+b+(c-d)=a+b+c-d,$$
$$a+[b-(c-d)]=a+b-(c-d)=a+b-c+d,$$
$$a-[b+(c-d)]=a-b-(c-d)=a-b-c+d.$$
$$a-[b-(c-d)]=a-b+(c-d)=a-b+c-d.$$

Również:

$$a-[b-\{c-(d-e)\}]=a-b+\{c-(d-e)\}=a-$$
$$-b+c-(d-e)=a-b+c-d+e.$$

I w podobny sposób:

$$a-[b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]=a-b+\{c-(d-\overline{e-f})\}=$$
$$=a-b+c-(d-\overline{e-f})=a-b+c-d+\overline{e-f}=a-$$
$$-b+c-d+e-f.$$

Często dla dogodności w rachunku wypada dwa lub więcej wyrazów zamknąć w nawias; prawidła na wprowadzenie nawiasów wypadają bezpośrednio z prawideł na zniesienie nawiasu.

Jakakolwiek liczba wyrazów w danem wyrażeniu może być zamkniętą w nawias, przed którym piszemy znak $+$.

Jakakolwiek liczba wyrazów w danem wyrażeniu może być wziętą w nawias, przed którym piszemy znak $-$, *byleby znak każdego z wyrazów, zamkniętych w tym nawiasie, został zmieniony.*

Tak naprzykład:

$$a-b+c-d+e=a-b+(c-d+e).$$
$$\text{lub}=a-b+c+(-d+e),$$
$$\text{lub}=a-(b-c+d-e),$$
$$\text{lub też}=a-b-(-c+d-e).$$

W podobny sposób można wprowadzić w wyrażenie więcej niż jedną parę nawiasów. Naprzykład:

$$a-b+c-d+e=a-[b-c+d-e]=$$
$$=a-[b-(c-d+e)].$$

PRZYKŁADY VII.

Uprościć następujące wyrażenia przez zniesienie nawiasów i następnie zebranie wyrazów podobnych w jeden wyraz:

1. $3a - b - (2a - b)$;
2. $1 - (1 - a) + (1 - a + a^2) - (1 - a + a^2 - a^3)$.
3. $a - b + c - (b - a + c) + (c - a + b) - (a - c + b)$.
4. $a - [\,2b - (3c + 2b - a)\,]$;
5. $2a - (3b + 2c) - [5b - (6c - 6b) + 5c - \{2a -$
$- (c + 2b)\}\,]$.
6. $15x - \{4 - [3 - 5x - (3x - 7)\,]\,\}$.
7. $x^4 - [\,4x^3 - \{6x^2 - (4x - 1)\}\,] - (x^4 + 4x^3 +$
$+ 6x^2 + 4x + 1)$.

VIII.

Mnożenie.

55. Przypuszczamy tutaj, że czytelnik zna już z arytmetyki tę zasadniczą prawdę, że iloczyn ilukolwiek czynników zawsze pozostaje ten sam w jakimkolwiek porządku będą wzięte czynniki; tak np. $2 \times 3 \times 5 = 2 \times 5 \times 3 = 3 \times 5 \times 2$ i t. d. Podobnie $abc = acb = bca$ i t. d.

Podobnie jeszcze i $c\,(a + b)$ jest równe $(a + b)\,c$, gdyż każde z tych wyrażeń oznacza iloczyn, powstały z pomnożenia tych samych dwóch czynników: jeden z nich jest c, a drugi $a + b$.

Rozróżniamy trzy przypadki w mnożeniu, mianowicie: I. mnożenie jednomianów; II. mnożenie wielomianu przez jednomian: III. mnożenie wielomianów. — Rozbierzemy kolejno trzy te przypadki.

56. I. Przypuśćmy, że mamy do pomnożenia $3a$ przez $4b$. Iloczyn z tych dwóch ilości może być tak napisany: $3 \times a \times 4 \times b$, czyli: $3 \times 4 \times a \times b$; iloczyn ten więc jest równy: $12\,ab$. Stąd wyciągamy następujące prawidło na mnożenie jednomianów: *należy pomnożyć współczynniki liczebne i następnie dopisać głoski za tym iloczynem.*

Tak naprzykład:

$$7a \times 3\,bc = 21\,abc.$$
$$4a \times 5\,b \times 3\,c = 60\,abc.$$

57. *Aby pomnożyć potęgi jednej i tej samej liczby należy tylko dodać wykładniki.*

Naprzykład, przypuśćmy, że mamy pomnożyć a^3 przez a^2. Na zasadzie paragrafu 16:

$$a^3 = a \times a \times a,$$

i:

$$a^2 = a \times a;$$

przeto:

$$a^3 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a = a^5 = a^{3+2}.$$

Podobnie:

$$c^4 \times c^3 = c \times c \times c \times c \times c \times c \times c = c^7 = c^{4+3}.$$

W takiż sam sposób możemy się przekonać o prawdziwości tego w każdym innym przypadku.

58. II. Przypuśćmy, że mamy pomnożyć $a + b$ przez 3. Mieć będziemy:

$$(a + b) \times 3 = 3\,(a + b) = a + b + a + b + a + b =$$
$$= 3\,a + 3\,b.$$

I podobnie:

$$(a + b) \times 7 = 7\,(a + b) = 7a + 7b.$$

Przypuśćmy dalej, że mamy pomnożyć $a + b$ przez c. Otrzymamy:

$$(a + b)\,c = c\,(a + b) = ca + cb.$$

W podobny sposób mieć będziemy:

$$(a - b) \times 3 = 3\,(a - b) = 3a - 3b;\ 7\,(a - b) = 7a - 7b;$$
$$(a - b)\,c = c\,(a - b) = c\,a - cb.$$

Stąd wyciągamy następujące prawidło na mnożenie wielomianu przez jednomian: *należy pomnożyć każdy wyraz wielomianu przez ten jednomian, przed każdym z tych iloczy-*

nów napisać znak odpowiedniego wyrazu i następnie tak otrzymane iloczyny zebrać w jedną całość (dodać).

59. III. Przypuśćmy, że mamy do pomnożenia $a+b$ przez $c+d$.

Tak jak w drugim przypadku mamy naprzód:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d);$$

lecz: $a(c+d) = ac + ad$; $b(c+d) = bc + bd$, przeto:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Dalej przypuśćmy, że mamy pomnożyć $a-b$ przez $c+d$.

$$(a-b)(c+d) = a(c+d) - b(c+d);$$

lecz: $a(c+d) = ac + ad$; $b(c+d) = bc + bd$; przeto:

$$(a-b)(c+d) = ac + ad - (bc+bd) =$$
$$= ac + ad - bc - bd.$$

Podobnież, jeżeli chcemy pomnożyć $a+b$ przez $c-d$, będzie:

$$(a+b)(c-d) = (c-d)(a+b)$$
$$= c(a+b) - d(a+b)$$
$$= ca + cb - (da+db) = ca + cb - da - db.$$

Nakoniec przy mnożeniu $a-b$ przez $c-d$ otrzymamy:
$(a-b)(c-d) = (c-d)a - (c-d)b$;

a że: $(c-d)a = ac - ad$; $(c-d)b = bc - bd$; przeto

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - (bc - bd) =$$
$$ac - ad - bc + bd.$$

Rozbierzmy teraz uważnie ten ostatni wypadek. Na zasadzie paragrafu 36 możemy powyższe wyrażenie napisać tak:

$$(+a-b)(+c-d) = +ac - ad - bc + bd.$$

Widzimy z tego, że wyrazom $+a$ w mnożnej i $+c$ w mnożniku, odpowiada wyraz $+ac$ w iloczynie; wyrazom $+a$ i $-d$ odpowiada wyraz $-ad$ w iloczynie; wyrazom $-b$ i $+c$ odpowiada wyraz $-bc$ iloczynu i nakoniec wyrazom $-b$ i $-d$ odpowiada wyraz $+bd$ w iloczynie.

Podobne uwagi można zrobić odnośnie do innych trzech wypadków; wszystkie te uwagi streszczają się krótko w następującym ważnym prawidle w mnożeniu: *jednakowe znaki dają znak* $+$, *różne znaki dają znak* $-$. Prawidło to nazywa się *prawidłem znaków*, i pod tą nazwą często do niego odwoływać się będziemy.

60. Możemy teraz dać prawidło ogólne na mnożenie wyrazów algebraicznych: *należy pomnożyć każdy wyraz mnożnej przez każdy wyraz mnożnika; tam gdzie wyrazy mnożone mają znaki jednakowe należy przed iloczynem napisać znak* $+$, *gdzie zaś wyrazy mnożone mają znaki różne, należy przed iloczynem napisać znak* $-$; *i tak otrzymane iloczyny dodać dla utworzenia zupełnego iloczynu.*

Naprzykład: pomnożyć $2a + 3b - 4c$ przez $3a - 4b$. Będzie:

$$(2a + 3b - 4c)(3a - 4b) = 3a(2a + 3b - 4c) -$$
$$4b(2a + 3b - 4c) = 6a^2 + 9ab - 12ac -$$
$$-(8ab + 12b^2 - 16bc) = 6a^2 + 9ab - 12ac - 8ab -$$
$$- 12b^2 + 16bc.$$

Jest to właśnie wypadek jaki otrzymamy stosując powyższe prawidło; możemy go uprościć i sprowadzić do takiego wyrażenia:

$$6a^2 + ab - 12ac - 12b^2 + 16bc.$$

Możemy toż prawidło sprawdzić jeszcze i objaśnić na mnożeniu, np. $6 - 3 + 2$ przez $7 + 3 - 4$; znajdziemy, że postępując podług prawidła i łącząc w jedno wypadki, otrzymamy 30; to jest 5×6, jak to możemy znaleść inną drogą.

61. Zgodnie z prawidłem, podanem w art. poprzedzającym, możemy rozszerzyć pojęcie mnożenia i na liczby ujemne, w następujący sposób:

Przez iloczyn dwóch ilości, z których jedna jest poprzedzona znakiem $-$, *rozumieć będziemy liczbę, jaką otrzymamy mnożąc te ilości po opuszczeniu znaku* $-$, *i poprzedzając iloczyn tym znakiem.* Będzie więc:

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab.$$

Przez iloczyn dwóch ilości, z których każda jest poprzedzona znakiem —, rozumieć będziemy liczbę, jaką otrzymamy mnożąc te ilości po opuszczeniu znaków. Czyli:

$$(-a) \cdot (-b) = ab.$$

Podobnie będzie:

$$\begin{aligned} 2a \times -4b &= -\ 8ab, \\ -4c \times \ \ 3a &= -12ac \\ -4c \times -4b &= 16bc. \end{aligned}$$

Szczególne przypadki podobnych wyrażeń są:

$$2a \times -4 = -8a;\ 2 \times -4 = -8;\ 2 \times -1 = -2.$$

62. Ponieważ przykłady podobne do tych, jakie podaliśmy w poprzednim paragrafie, mogą często się przytrafić, przeto musimy je uwzględnić w naszych prawidłach; z tego powodu prawidło zupełne na mnożenie da się wyrazić w następujący sposób:

Aby pomnożyć jednomiany, należy pomnożyć ich współczynniki liczebne, napisać za tym iloczynem wszystkie głoski, a znak oznaczyć na zasadzie prawidła znaków.

Aby pomnożyć przez siebie wielomiany, należy pomnożyć każdy wyraz jednego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu, na zasadzie prawidła na mnożenie jednomianów, i następnie połączyć te częściowe iloczyny dla utworzenia iloczynu zupełnego.

63. Podajemy poniżej kilka przykładów mnożenia, w których dane wyrażenia są uporządkowane w odpowiedni sposób:

$$\begin{array}{lll} a+b & \quad a+b & \quad x^2+3x \\ a+b & \quad a-b & \quad x\ \ -1 \\ \hline a^2+ab & \quad a^2+ab & \quad x^3+3x^2 \\ \quad\ \ +ab+b^2 & \quad\quad -ab-b^2 & \quad\quad\ -x^2-3x \\ \hline a^2+2ab+b^2 & \quad a^2\quad -b^2 & \quad x^3+2x^2-3x \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} a^2 & -ab & +b^2 \\ a & +b \\ \hline a^3 & -a^2b & +ab^2 \\ & +a^2b & -ab^2 & +b^3 \\ \hline a^3 & & & +b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} 3a^2 & -4ab & +5b^2 \\ a^2 & -2ab & +3b^2 \\ \hline 3a^4 & -4a^3b & +5a^2b^2 \\ & -6a^3b & +8a^2b^2 & -10ab^3 \\ & & +9a^2b^2 & -12ab^3 & +15b^4. \\ \hline 3a^4 & -10a^3b & +22a^2b^2 & -22ab^3 & +15b^4. \end{array}$$

Dla objaśnienia działań rozbierzmy ostatni przykład: Wszystkie wyrazy mnożnej mnożymy naprzód przez pierwszy wyraz mnożnika, mianowicie przez a^2, zwracając uwagę na *prawidło znaków*; otrzymujemy tym sposobem: $3a^4 - 4a^3b + 5a^2b^2$. Następnie bierzemy drugi wyraz mnożnika, mianowicie: $-2ab$ i mnożymy przez niego wszystkie wyrazy mnożnej, zachowując *prawidło na znaki*, tym sposobem mieć będziemy: $-6a^3b + 8a^2b^2 - 10ab^3$. Nakoniec przez ostatni wyraz mnożnika, mianowicie $3b^2$ mnożymy wszystkie wyrazy mnożnej, pamiętając o *prawidle na znaki* i otrzymujemy $+9a^2b^2 - 12ab^3 + 15b^4$.

Przy tem wszystkie wyrazy, które otrzymujemy, porządkujemy w ten sposób, że *wyrazy podobne są ustawione w tej samej kolumnie*; ten sposób porządkowania jest bardzo użytecznym, gdyż pozwala nam łączyć następnie wyrazy szybko i bez pomyłki dla otrzymania wypadku ostatecznego. W obecnym przykładzie ten wypadek ostateczny będzie:

$$3a^4 - 10a^3b + 22a^2b^2 - 22ab^3 + 15b^4.$$

64. Czytelnik powinien zwrócić tutaj uwagę na to, że aby odrazu ułożyć wyrazy podobne w tej samej kolumnie, wyrazy mnożnej i mnożnika należy ustawić w pewnym porządku. W tym celu obieramy pewną głoskę, wchodzącą do kilku wyrazów i następnie porządkujemy wyrazy *podług potęg tejże głoski*. I tak: w ostatnim przykładzie obieramy głoskę a; na pierwszem miejscu mnożnej piszemy wyraz $3a^2$, zawierający najwyższą potęgę a w całym wielomianie, mianowicie potęgę drugą; poczem piszemy wyraz $-12ab$, który zawiera następną potęgę a, mianowicie pierwszą, i nakoniec piszemy wyraz $5b^2$, niezawierający a wcale. Gdy w ten sposób postąpiliśmy z mnożną, wtedy mówimy, że *mnożną uporządkowaliśmy podług potęg malejących głoski a.* Mnożnik porządkujemy w podobny sposób.

Moglibyśmy także ustawić wyrazy mnożnej i mnożnika w odwrotnym porządku; w tym razie powiedzielibyśmy, że one są uporządkowane *podług potęg rosnących głoski a.* Obojętną jest rzeczą jaki porządek przyjmiemy; — lecz należy pamiętać o tem, że mnożna i mnożnik muszą być uporządkowane w *jednakowy sposób.*

65. Dajemy tutaj jeszcze kilka przykładów:

Pomnożyć $1 + 2x - 3x^2 + x^4$ przez $x^3 - 2x - 2$. Uporządkujemy te wielomiany podług potęg malejących głoski x.

$$\begin{array}{l}
x^4 - 3x^2 + 2x + 1 \\
x^3 - 2x - 2 \\
\hline
x^7 - 3x^5 + 2x^4 + x^3 \\
\quad - 2x^5 + \quad + 6x^3 - 4x^2 - 2x \\
\qquad - 2x^4 \quad + 6x^2 - 4x - 2 \\
\hline
x^7 - 5x^5 \quad + 7x^3 + 2x^2 - 6x - 2.
\end{array}$$

Pomnożyć: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ przez: $a + b + c$.

Porządkujemy mnożną i mnożnik podług potęg malejących głoski a.

$$\begin{array}{l}
a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2 \\
a + b + c \\
\hline
a^3 - a^2b - a^2c + ab^2 - abc + ac^2 \\
\quad + a^2b \quad - ab^2 - abc \quad + b^3 - b^2c + bc^2 \\
\qquad + a^2c \quad - abc - ac^2 \quad + b^2c - bc^2 + c^3 \\
\hline
a^3 \qquad - 3abc \quad + b^3 \qquad + c^3
\end{array}$$

Ten sam przykład może być także wykonany przez użycie nawiasów w podobny sposób:

$$\begin{array}{l}
a^2 - a(b + c) + (b^2 - bc + c^2) \\
a + (b + c) \\
\hline
a^3 - a^2(b + c) + a(b^2 - bc + c^2) \\
\quad + a^2(b + c) - a(b + c)(b + c) + (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\
\hline
\end{array}$$

Lecz, mamy: $a(b^2 - bc + c^2) - a(b + c)(b + c) =$

$$= a\{b^2 - bc + c^2 - (b + c)(b + c)\} =$$
$$= a\{b^2 - bc + c^2 - (b^2 + 2bc + c^2)\} =$$
$$= a\{b^2 - bc + c^2 - b^2 - 2bc - c^2\} = -3abc;$$

i podobnie:

$$(b + c)(b^2 - bc + c^2) = b^3 + c^3.$$

Przeto, jak wyżej znaleziono, ostateczny wypadek będzie:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Pomnożyć $x - a$, przez $x - b$ i przez $x - c$:

$$\begin{array}{l}
x - a \\
x - b \\
\hline
x^2 - ax \\
\quad - bx + ab \\
\hline
x^2 - (a + b)x + ab \\
x - c \\
\hline
x^3 - (a + b)x^2 + abx \\
\qquad - cx^2 + (a + b)cx - abc \\
\hline
x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc.
\end{array}$$

Zwracamy tutaj uwagę uczącego się na to, że z każdego zadania na mnożenie, w którem mnożna jest różną od mnożnika, można zrobić dwa przykłady, biorąc początkowy mnożnik za nową mnożną, i początkową mnożną za nowy mnożnik.

Wypadek w drugim przykładzie powinien być tenże sam co i w pierwszym; i to może służyć za próbę dokładności roboty.

PRZYKŁADY VIII.

Pomnożyć:

1. $2x^3$ przez $4x^2$. 2. $3a^4$ przez $4a^5$.
3. $2a^2b$ przez $2ab^2$. 4. $3x^3y^2z$ przez $5x^4y^3z^2$.
5. $7x^4y^2$ przez $7y^2z^4$.
6. $4a^2 - 3b$ przez $3ab$.
7. $8a^2 - 9ab$ przez $3a^2$.
8. $x^2y^3 - y^3z^4 + z^4x^2$ przez $x^2y^2z^2$.
9. $2x - y$ przez $2y + x$.
10. $2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$ przez $3x - 6$.
11. $x^3 + x^2 + x - 1$ przez $x - 1$.
12. $x^3 - 7x^2 + 5x + 1$ przez $2x^2 - 4x + 1$.
13. $x^3 + 6x^2 + 24x + 60$ przez $x^3 - 6x^2 + 12x + 12$.
14. $x^2 - 3ax$ przez $x + 3a$.
15. $a^2 + 2ax - x^2$ przez $a^2 + 2ax + x^2$.
16. $x^2 + y^2 - xy + x + y - 1$ przez $x + y - 1$.
17. $x^4 + 2x^3y + 4x^2y^2 + 8xy^3 + 16y^4$ przez $x - 2y$.
18. $x - a$ przez $x + a$ i przez $x^2 + a^2$.

IX.

Dzielenie.

66. Dzielenie w algebrze, równie jak i w arytmetyce, jest działaniem odwrotnem mnożeniu. W mnożeniu znajdujemy iloczyn, mając dwa dane czynniki; w dzieleniu zaś mamy dany iloczyn i jeden z czynników, a chcemy znaleść czynnik drugi. Ten czynnik, który chcemy oznaczyć nazywa się *ilorazem*.

Ten rozdział zatem jest ściśle związany z rozdziałem poprzednim, gdyż obecnie mamy niejako rozwikłać, *odrobić* te działania, które były tam wykonane. W dzieleniu rozróżnimy trzy przypadki, mianowicie: I. Dzielenie jednomianu przez jednomian. II. Dzielenie wielomianu przez jednomian. III. Dzielenie wielomianu przez wielomian.

67. I. Pokazaliśmy już wyżej w paragrafie 10 jak oznaczyć, że jedno wyrażenie ma być podzielone przez drugie. Naprzykład: jeżeli $5a$ ma być podzielone przez $2c$, wtedy iloraz wskazuje się tak $5a:2c$, lub $5a \div 2c$, lub najczęściej $\frac{5a}{2c}$.

Może się przytrafić, że niektóre z czynników dzielnika znajdują się w dzielnej; wówczas iloraz może być uproszczony za pomocą zasady już używanej w arytmetyce. Przypuśćmy naprzykład, że $15a^2b$ ma być podzielone przez $6bc$; wtedy iloraz będzie $\frac{15a^2b}{6bc}$. Tutaj dzielna $15a^2b = 5a^2 \times 3b$; dzielnik zaś $6bc = 2c \times 3b$; czynnik więc $3b$ znajduje się zarazem w dzielnej i w dzielniku. Przeto, tak jak w arytmetyce, możemy opuścić ten wspólny czynnik i iloraz oznaczyć przez $\frac{5a^2}{2c}$; tym sposobem $\frac{15a^2b}{6bc} = \frac{5a^2}{2c}$.

Może się również zdarzyć, że wszystkie czynniki, znajdujące się w dzielniku, mogą być w ten sposób usunięte. Tak naprzykład przypuśćmy, że mamy $24abx$ podzielić przez $8ax$:

$$\frac{24abx}{8ax} = \frac{3b \times 8ax}{8ax} = 3b.$$

68. Prawidło odnoszące się do *znaku* ilorazu może być wyprowadzone z prawideł podanych w mnożeniu.

I tak naprzykład, mamy:

$$4ab \times 3c = 12\,abc;$$

przeto:

$$\frac{12abc}{4ab} = 3c; \quad \frac{12\,abc}{3\,c} = 4ab\,.$$

$$4ab \times -3c = -12abc;$$

przeto:

$$\frac{-12\,abc}{4\,ab} = -3c, \quad \frac{-12abc}{-3\,c} = 4\,ab\,.$$

Dalej:

$$-4ab \times 3c = -12\,abc;$$

przeto:

$$\frac{-12\,abc}{-4ab} = 3c\,; \quad \frac{-12abc}{3c} = -4\,ab\,.$$

I nakoniec:

$$-4ab \times -3c = 12abc\,;$$

więc:

$$\frac{12abc}{-4\,ab} = -3c; \quad \frac{12abc}{-3c} = -4ab\,.$$

Stąd widzimy, że toż samo *prawidło* znaków, które znaleźliśmy dla mnożenia, ma miejsce także i w dzieleniu.

69. Z tego wszystkiego wyprowadzamy następujące prawidło na dzielenie jednomianów: Należy napisać dzielną nad dzielnikiem oddzieliwszy je linijką poziomą; jeżeli te wyrażenia mają wspólne czynniki, wtedy należy je znieść, i napisać przed całym ilorazem znak $+$, jeżeli jednomiany miały znaki jednakowe, a znak — jeżeli one miały znaki różne.

70. *Aby daną potęgę pewnej liczby podzielić przez inną potęgę tejże samej liczby, należy od wykładnika pierwszej odjąć wykładnik drugiej.*

Przypuśćmy naprzykład, że mamy podzielić a^5 przez a^3. Na zasadzie paragrafu 16:

$$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$$
$$a^3 = a \times a \times a,$$

więc:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2 = a^{5-3}.$$

Podobnież

$$\frac{c^7}{c^4} = \frac{c \times c \times c \times c \times c \times c \times c}{c \times c \times c \times c} = c \times c \times c = c^3 = c^{7-4}.$$

W podobny sposób prawidło to może być dowiedzione i w każdym innym przypadku.

Lub też możemy pokazać prawdziwość tego prawidła w następny sposób:

Na zasadzie § 57:

$$c^4 \,.\, c^3 = c^7,$$

przeto:

$$\frac{c^7}{c^4} = c^3\,; \quad \frac{c^7}{c^3} = c^4\,.$$

71. Jeżeli w dzielnej znajduje się pewna potęga danej liczby, a w dzielniku wyższa potęga tejże samej liczby, wtedy iloraz może być uproszczony na zasadzie paragrafów 69 i 70. Tak np., jeżeli było $4\,ab^2$ do podzielenia przez $3\,cb^5$; wówczas iloraz byłby wyrażony przez $\frac{4ab^2}{3cb^5}$. Czynnik b^2 znajduje się w dzielnej i w dzielniku, przeto może być opuszczony, i tym sposobem iloraz żądany byłby $\frac{4\,a}{3cb^3}$; czyli:

$$\frac{4\,ab^2}{3\,cb^5} = \frac{4a}{3cb^3}.$$

72. II. Prawidło na dzielenie wielomianu przez jednomian może być otrzymane przez rozbiór odpowiedniego przypadku w mnożeniu.

I tak, mamy:

$$(a - b)\,c = ac - bc;$$

więc:

$$\frac{ac - bc}{c} = a - b,$$

dalej:

$$(a-b)\times -c = -ac + bc;$$

przeto:

$$\frac{-ac+bc}{-c} = a - b.$$

A zatem przychodzimy do następnego prawidła na dzielenie wielomianu przez jednomian: każdy wyraz dzielnej należy podzielić przez dzielnik, opierając się na prawidle podanym w pierwszym przypadku i połączyć te wypadki dla utworzenia zupełnego ilorazu. Naprzykład:

$$\frac{4a^3 - 3abc + a^2c}{a} = 4a^2 - 3bc + ac\,.$$

73. III. Aby podzielić jeden wielomian przez drugi, należy postępować w podobny sposób, jak przy dzieleniu w arytmetyce.

Prawidło na to działanie może być wyrażone w następujący sposób. *Dzielną i dzielnik należy uporządkować podług potęg rosnących lub malejących jednej i tej samej głoski. Następnie pierwszy wyraz dzielnej należy podzielić przez pierwszy wyraz dzielnika, i ten wypadek będzie pierwszym wyrazem ilorazu. Potem należy pomnożyć cały dzielnik przez ten pierwszy wyraz ilorazu, i iloczyn odjąć od dzielnej. Otrzymamy tym sposobem pierwszą resztę, z którą należy tak postępować jak z dzielną. Działanie to należy powtarzać dotąd, dopóki na resztę nie otrzymamy 0, lub też taką resztę, której bez użycia ułamków dalej dzielić nie można.*

74. Użycie tego prawidła, równie jak i objaśnienia, wykazujące zasady na których się ono opiera, pokaże się najlepiej na następujących przykładach:

$$\begin{array}{r|l} a^2+2ab+b^2 & a+b \\ \pm a^2 \pm ab & a+b \\ \hline +ab+b^2 & \\ \pm ab \pm b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} a^2-b^2 & a-b \\ \pm a^2 \mp ab & a+b \\ \hline ab-b^2 & \\ \pm ab \mp b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} a^2-b^2 & a+b \\ \pm a^2 \pm ab & a-b \\ \hline -ab-b^2 & \\ \mp ab \mp b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3a^4 - 10a^3b + 22a^2b^2 - 22ab^3 + 15b^4 & 3a^2 - 4ab + 5b^2 \\ \pm 3a^4 \mp 4a^3b \pm 5a^2b^2 \qquad\qquad & a^2 - 2ab + 3b^2 \\ \hline -6a^3b + 17a^2b^2 - 22ab^3 + 15b^4 & \\ \mp 6a^3b \pm 8a^2b^2 \mp 10ab^3 \qquad & \\ \hline 9a^2b^2 - 12ab^3 + 15b^4 & \\ \pm 9a^2b^2 \mp 12ab^3 \pm 15b^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Rozbierzmy ostatni przykład. Cała dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz; ponieważ zaś oba te wielomiany są uporządkowane podług potęg malejących głoski a, przeto pierwszy wyraz dzielnej jest iloczynem z pierwszego wyrazu dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu. Dzieląc więc ten pierwszy wyraz dzielnej $3a^4$ przez pierwszy wyraz dzielnika $3a^2$, otrzymamy a^2, — pierwszy wyraz ilorazu. Mnożymy następnie cały dzielnik $3a^2 - 4ab + 5b^2$ przez pierwszy wyraz ilorazu a^2. Otrzymamy: $3a^4 - 4a^3b + 5a^2b^2$; tak znaleziony iloczyn odejmijmy od dzielnej: otrzymamy resztę pierwszą, uporządkowaną także podług potęg malejących głoski a: $-6a^3b + 17a^2b^2 - 22ab^3 + 15b^4$.

Ponieważ cała dzielna była iloczynem z całego dzielnika przez cały iloraz, a odjęliśmy od niej iloczyn z dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu, przeto pozostałość: $-a^3b +$ i t. d. będzie iloczynem z dzielnika przez wszystkie pozostałe wyrazy ilorazu.

O tej reszcie można więc toż samo powiedzieć, co i o całej dzielnej; mianowicie, że pierwszy jej wyraz $-6a^3b$ jest iloczynem z pierwszego wyrazu dzielnika $3a^2$, przez pierwszy z pozostałych, czyli przez *drugi* wyraz ilorazu. Dzieląc więc ten wyraz $-6a^3b$ przez $3a^2$, znajdziemy $-2ab$, jako pierwszy z pozostałych wyrazów, czyli drugi wyraz ilorazu. Postępując tak dalej wynajdziemy kolejno wszystkie wyrazy ilorazu.

Bardzo ważną jest rzeczą uporządkowanie tak dzielnej, jak i dzielnika podług potęg jednej i tej samej głoski i pamiętanie, że tak samo mają być uporządkowane wszystkie reszty.

75. Może się przytrafić zarówno jak i w arytmetyce, że dzielenie *nie może być w zupełności wykonane.* Tak naprzykład, jeżeli dzielimy $a^2+2ab+2b^2$ przez $a+b$, wtedy otrzymamy na iloraz, tak jak w poprzednim paragrafie $a+b$, lecz jeszcze *pozostanie reszta* b^2.

Taki wypadek wyrażamy w podobny sposób, jak i w arytmetyce, mianowicie możemy napisać:

$$\frac{a^2+2ab+2b^2}{a+b}=a+b+\frac{b^2}{a+b},$$

to jest, że iloraz będzie $a+b$ wraz z częścią ułamkową $\frac{b^2}{a+b}$.

W ogóle, jeżeli A i B oznaczają dwa wyrażenia, i jeżeli przez dzielenie A przez B otrzymamy iloraz q i resztę R, wtedy ten wypadek wyraża się algebraicznie jednym z następnych sposobów:

$$A=qB+R, \text{ lub } A-qB=R,$$

lub
$$\frac{A}{B}=q+\frac{R}{B};$$

lub wreszcie: $\frac{A}{B}-q=\frac{R}{B}$.

Należy tutaj zwrócić uwagę na to, że każda głoska może oznaczać wyrażenie algebraiczne (jednomian lub wielomian): często dogodną jest rzeczą dla jasności i krótkości oznaczyć w ten sposób jedną głoską całe wyrażenie algebraiczne.

Ułamki algebraiczne będą przedmiotem jednego z następnych rozdziałów; tutaj ograniczymy się tymi przypadkami, w których dzielenie daje się wykonać bez reszty.

76. Dalsze przykłady dla wprawy:

Podzielić: $x^7-5x^5+7x^3+2x^2-6x-2$ przez
$$1+2x-3x^2+x^4.$$

Uporządkujmy dzielną i dzielnik podług potęg malejących głoski x:

$$\begin{array}{l|l}
x^7-5x^5+7x^3+2x^2-6x-2 & x^4-3x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
\pm x^7\mp 3x^5+2x^4\pm x^3 & x^3-2x-2 \\ \cline{1-1}
\quad -2x^5-2x^4+6x^3+2x^2-6x-2 & \\
\quad \mp 2x^5 \pm 6x^3\mp 4x^2\mp 2x & \\ \cline{1-1}
\qquad -2x^4+6x^2-4x-2 & \\
\qquad \mp 2x^4\pm6x^2\mp 4x\mp 2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Podzielić: $a^3+b^3+c^3-3abc$ przez $a+b+c$.

Porządkujemy dzielną i dzielnik podług potęg malejących głoski a:

$$\begin{array}{l|l}
a^3-3abc+b^3+c^3 & a+b+c \\ \cline{2-2}
\pm a^3\pm a^2b\pm a^2c & a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\ \cline{1-1}
\quad -a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 & \\
\quad \mp a^2b\mp ab^2\mp abc & \\ \cline{1-1}
\qquad -a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3 & \\
\qquad \mp a^2c\mp abc\mp ac^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad +ab^2-abc+ac^2+b^3+c^3 & \\
\qquad\quad \pm ab^2\pm b^2c\pm b^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -abc+ac^2-b^2c+c^3 & \\
\qquad\qquad \mp abc\mp bc^2\mp b^2c & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad ac^2+bc^2+c^3 & \\
\qquad\qquad\quad \pm ac^2\pm bc^2\pm c^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Przy porządkowaniu dzielnej i dzielnika podług potęg malejących głoski a, takie wyrazy, jak a^2b i a^2c, które mają ten sam wykładnik nad a, ustawiamy w ten sposób, że obieramy nową głoskę np. b, i ten wyraz, który ją zawiera stawiamy przed tym wyrazem, który jej nie ma; i w dalszym ciągu: z wyrazów ab^2 i abc, pierwszy piszemy przed drugim, gdyż on zawiera b z wyższym wykładnikiem.

Ten przykład można także wykonać z użyciem nawiasów w ten sposób:

$$\begin{array}{l|l}
a^3 \qquad -3abc+b^3+c^3 & a+b+c \\
\pm a^3 \pm a^2(b+c) & \overline{a^2-a(b+c)+b^2-bc+c^2} \\
\hline
\quad -a^2(b+c)-3abc+b^3+c^3 & \\
\quad \mp a^2(b+c) \mp a(b+c)^2 & \\
\hline
\qquad a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 & \\
\quad \pm a(b^2-bc+c^2) \pm b^3 \pm c^3 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(b+c)^2=b^2+2bc+c^2 \\
b^2-bc+c^2 \\
b+c \\
\hline
b^3-b^2c+bc^2 \\
\quad +b^2c-bc^2+c^3 \\
\hline
\quad b^3+c^3
\end{array}$$

Podzielić:

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$

przez $x-c$.

$$\begin{array}{l|l}
x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc & x-c \\
\pm x^3 \mp cx^2 & \overline{x^2-(a+b)x+ab} \\
\hline
\quad -(a+b)x^2+(ab+ac+bc)x-abc & \\
\mp(a+b)x^2 \pm (a+b)cx & \\
\hline
\qquad abx-abc & \\
\quad \pm abx \mp abc & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}$$

Każde zadanie na mnożenie, w którem mnożna jest różną od mnożnika, daje powód do dwóch przykładów na dzielenie; gdyż jeżeli iloczyn podzielimy przez którykolwiek z czynników, otrzymamy czynnik drugi. Z tego powodu uczący się ze wszystkich przykładów danych w rozdziale o mnożeniu, może układać przykłady na dzielenie i tym sposobem probować dokładności swojej roboty.

I również z każdego przykładu na dzielenie, w którym dzielnik i iloraz są różne, może być ułożony drugi przykład, w którym dzielna pozostanie taż sama co i poprzednio, nowym zaś dzielnikiem będzie iloraz; wtedy na nowy iloraz powinien wypaść początkowy dzielnik.

PRZYKŁADY IX.

Podzielić:

1) $15x^5$ przez $3x^2$; 2) $24a^4b^5c^6$ przez $-3a^2b^3c^4$.

3) $4x^3-8x^2+16x$ przez $4x$.

4) $3a^4-12a^3+15a^2$ przez $-3a^2$.

5) $-15a^3b^3-3a^2b^2+12ab$ przez $-3ab$.

6) $2x^3-x^2+3x-9$ przez $2x-3$.

7) x^6-1 przez $x-1$. 8) $a^3-2ab^2+b^3$ przez $a-b$.

9) a^5+32b^5 przez $a+2b$.

10) $x^5+2x^4y+3x^3y^2-x^2y^3-2xy^4-3y^5$ przez x^3-y^3.

11) x^4+64 przez x^2+4x+8.

12) $x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1$ przez $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

13) $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$ przez
$x^2-(a+b)x+ab$.

14) $a^2(b+c)+b^2(a-c)+c^2(a-b)+abc$ przez $a+b+c$.

15) $(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$ przez
$(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$.

X.

Szczególne przypadki mnożenia.

77. Niektóre szczególne przypadki mnożenia przytrafiają się tak często w rachunku algebraicznym, że zasługują tutaj na osobną wzmiankę.

Następujące trzy przykłady są wielkiej wagi:

$$\begin{array}{lll} a+b & a-b & a+b \\ a+b & a-b & a-b \\ \hline a^2+ab & a^2-ab & a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 & \quad -ab+b^2 & \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 & a^2-2ab+b^2 & a^2 \qquad -b^2. \end{array}$$

Pierwszy przykład daje wartość iloczynu $(a+b)$ $(a+b)$, czyli $(a+b)^2$; z niego mamy:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

To jest: *kwadrat sumy dwóch liczb jest równy sumie kwadratów tychże liczb, więcej podwójny ich iloczyn.*

Podobnie, z drugiego przykładu mamy:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

To jest: *kwadrat różnicy dwóch liczb jest równy sumie kwadratów tychże liczb, mniej podwójny ich iloczyn.*

Nakoniec ostatni przykład daje:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

To jest: *iloczyn z sumy dwóch liczb przez ich różnicę, równa się różnicy kwadratów tychże liczb.*

78. Wypadki otrzymane w poprzednim paragrafie, przedstawiają przykład jednego z wielkich pożytków algebry: w samej rzeczy algebra daje nam możność *dowodzenia ogólnych twierdzeń odnoszących się do liczb*, a także *wyrażania tychże twierdzeń krótko.*

Naprzykład: wypadek $(a+b)$ $(a-b) = a^2 - b^2$ jest dowiedziony ogólnie dla wszystkich liczb i jest wyrażony w symbolach krócej i zwięźlej, aniżeli wyrazami.

Wypadek ogólny w podobny sposób wyrażony symbolami nazywa się *wzorem algebraicznym* (formułą).

79. Tutaj jeszcze możemy pokazać i objaśnić znaczenie znaku $\pm$, który powstaje z połączenia znaków $+$ i $-$, i który jest zwany *znakiem podwójnym.*

Ponieważ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, a $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, przeto możemy przedstawić oba te wypadki w jednym wzorze tak:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

gdzie $\pm$ pokazuje, że możemy wziąć albo znak $+$ albo też znak $-$, ale *zawsze biorąc jednocześnie albo znaki górne, albo też znaki dolne;* $a \pm b$ należy czytać tak: *a więcej* lub *mniej b.*

80. Poświęcimy kilka następnych paragrafów dla wykazania użycia wzorów paragrafu 77. Ażeby łatwiej było można do nich się odwołać, wypisujemy je razem i opatrujemy każdy osobnym numerem:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad . \; . \; . \quad (2)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad . \; . \; . \quad (3).$$

81. Wzory te mogą się nieraz przydać i w obliczeniach arytmetycznych.

Tak naprzykład: przypuśćmy, że chcemy znaleść różnicę kwadratów 127 i 123. Na zasadzie wzoru (3) będzie:

$$(127)^2 - (123)^2 = (127+123)(127-123) = 250 \times 4 = 1000.$$

Tym sposobem szukana liczba została znaleziona prędzej i łatwiej, aniżeli przez podniesienie do kwadratu liczb 127 i 123 i następne odjęcie drugiego kwadratu od pierwszego.

Dalej, na zasadzie wzoru (2):

$$(29)^2 = (30-1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841,$$

przez co znowuż kwadrat 29 został prędzej wynaleziony, aniżeli przez bezpośrednie pomnożenie 29 przez 29.

Przypuśćmy jeszcze, że mamy pomnożyć 53 przez 47. Z wzoru (3) mamy:

$$53 \times 47 = (50+3)(50-3) = (50)^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491.$$

82. Przypuśćmy teraz, że chcemy znaleść kwadrat ilości $3x + 2y$. Oczywiście możemy dojść do tego zwyczajną drogą, mnożąc $3x+2y$ przez $3x+2y$. Lecz możemy także otrzymać żądany przypadek i inaczej, przez użycie wzoru (1). Wzór ten ma miejsce jakiekolwiekby były liczby a i b; możemy więc w nim podstawić $3x$ w miejsce a, i $2y$ w miejsce b. Tym sposobem będzie:

$$(3x+2y)^2=(3x)^2+2(3x\times 2y)+(2y)^2=9x^2+12xy+4y^2.$$

Uczący się może sądzić, że w tym przypadku nic nie wygrywa przez użycie wzoru, gdyż prawdopodobnie otrzymałby szukany wypadek tak prędko i pewnie zwykłem mnożeniem, jak przez użycie wzoru. Jakkolwiek w obecnym przypadku jest to prawdą, ale z czasem przekonamy się, że w barziej złożonych przypadkach użycie wzorów oddaje wielkie dusługi.

83. Przypuśćmy, że chcemy znaleść kwadrat $x+y+z$. Oznaczamy $x+y$ przez a. Wtedy

$$x+y+z=a+z;$$

i na zasadzie wzoru (1) mieć będziemy:

$$(a+z)^2=a^2+2az+z^2=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2=$$
$$=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2.$$

Stąd:

$$(x+y+z)^2=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2=$$
$$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx.$$

Przypuśćmy dalej, że szukamy kwadratu $p-q+r-s$. Czyniąc $p-q$ równem a, i $r-s$ równem b, będzie:

$$p-q+r-s=a+b.$$

Na zasadzie wzoru (1) mamy:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=(p-q)^2+2(p-q)(r-s)+(r-s)^2.$$

Lecz opierając się na wzorze (2), możemy znaleść $(p-q)^2$ i $(r-s)^2$.

Tym sposobem będzie:

$$(p-q+r-s)^2=p^2-2pq+q^2+2(pr-ps-qr+qs)+$$
$$+r^2-2rs+s^2=$$
$$=p^2+q^2+r^2+s^2+2pr+2qs-2ps-2qr-2pq-2rs.$$

Przypuśćmy nakoniec, że mamy znaleść iloczyn $p-q+$ $+r-s$ przez $p-q-r+s$.

Uczyńmy znowuż: $p-q=a$, i $r-s=b$; wtedy: $p-q+r-s=a+b$, a $p-q-r+s=a-b$.

Na zasadzie wzoru (3) otrzymamy:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2=(p-q)^2-(r-s)^2;$$

a na zasadzie wzoru (2) mieć będziemy:

$$(p-q+r-s)(p-q-r+s)=p^2-2pq+q^2-(r^2-2rs+s^2)=$$
$$=p^2+q^2-r^2-s^2-2pq+2rs$$

84. Sposób użyty w poprzednim paragrafie jest łatwy, i pewną drogą prowadzi do celu, przeto zawsze takiego sposobu powinien się trzymać początkujący. Lecz po nabyciu większej wprawy, i lepszem zaznajomieniu się z przedmiotem, (może się uwolnić od niektórych części roboty. I tak np. w ostatnim przykładzie może opuścić wprowadzanie ilości a i b, i wprost postępować w ten sposób:

$$(p-q+r-s)(p-q-r+s)=\{p-q+(r-s)\}\{p-q-$$
$$-(r-s)\}=(p-q)^2-(r-s)^2=p^2-2pq+q^2-(r^2-2rs+s^2)$$
$$=p^2-2pq+q^2-r^2+2rs-s^2;$$

albo jeszcze krócej:

$$(p-q+r-s)(p-q-r+s)=(p-q)^2-(r-s)^2=$$
$$=p^2-2pq+q^2-r^2+2rs-s^2.$$

Lecz w początkach radzimy uczącemu się rozwijać działanie w zupełności, tak jak to było pokazane w paragrafie poprzednim.

85. W następującym przykładzie spotkamy użycie wszystkich trzech wzorów.

Znaleść iloczyn z czterech czynników $a+b+c$, $a+b-c$, $a-b+c$, $b+c-a$. Weźmy najpierw dwa pierwsze czynniki; z wzorów (3) i (1) otrzymamy:

$$(a+b+c)(a+b-c)=(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2.$$

Weźmy dalej dwa drugie czynniki; z wzorów (3) i (2) mieć będziemy:

$$(a-b+c)(b+c-a)=\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}=$$
$$=c^2-(a-b)^2=c^2-a^2+2ab-b^2.$$

Mamy teraz do pomnożenia:

$a^2+2ab+b^2-c^2$ przez $c^2-a^2+2ab-b^2$.

Otrzymamy:

$$(a^2+2ab+b^2-c^2)(c^2-a^2+2ab-b^2)=$$
$$=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}=$$
$$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2=4a^2b^2-\{(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)c^2+$$
$$+c^4\}=4a^2b^2-(a^2+b^2)^2+2(a^2+b^2)c^2-c^4=$$
$$=4a^2b^2-a^4-2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4=$$
$$=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

86. Są jeszcze inne ogólne wzory, odnoszące się do mnożenia, mniejszej wagi, aniżeli trzy wzory podane w paragrafie 80, wszakże zasługujące na wzmiankę. Umieszczamy niektóre z nich w tym celu, aby czytelnik mógł je odnaleść łatwo, gdy zajdzie tego potrzeba; wszystkie one mogą być z łatwością wyprowadzone przez rzeczywiste wykonanie mnożenia:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3,$$
$$(a+b)^3=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^3=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$
$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3=$$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+2bc+c^2)+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3=$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc.$$

87. Bardzo pożyteczne ćwiczenia na mnożenie wypadają z zadań, w których chcemy dowieść równości dwóch wyrażeń, przez pokazanie, że wyrażenia te prowadzą do tych samych wypadków ostatecznych.

Naprzykład, chcemy pokazać że:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a).$$

Jeżeli pomnożymy $a-b$ przez $b-c$, otrzymamy:

$$ab-b^2-ac+bc;$$

mnożąc dalej ten wypadek przez $c-a$, znajdziemy:

$$cab-cb^2-ac^2+bc^2-a^2b+ab^2+a^2c-abc,$$

to jest:

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a).$$

Inne zadanie: dowieść, że:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$$
$$=2(c-b)(c-a)+2(b-a)(b-c)+2(a-b)(a-c).$$

Z wzoru (2) paragrafu 80, otrzymujemy:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$$
$$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2=$$
$$=2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Lecz skądinąd wiemy, że:

$$(c-b)(c-a)=c^2-ca-cb+ab$$
$$(b-a)(b-c)=b^2-ba-bc+ac$$
$$(a-b)(a-c)=a^2-ab-ac+bc,$$

przeto:

$$(c-b)(c-a)+(b-a)(b-c)+(a-b)(a-c)=$$
$$=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc,$$

skąd nakoniec,

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$$
$$=2(c-b)(c-a)+2(b-a)(b-c)+2(a-b)(a-c).$$

PRZYKŁADY X.

Zastosować wzory paragrafu 80 do następujących 11 przykładów na mnożenie:

1. $(15x+14y)^2$.
2. $(7x^2-5y^2)^2$.
3. $(x^2+2x-2)^2$.
4. $(2x^2-3x-4)^2$.
5. $(x^2+xy+y^2)(x^2+xy-y^2)$.
6. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.
7. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy-y^2)$.
8. $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2)$.

9. $(x-3)^2(x^2+6x+9)$.
10. $(2x+3y)^2(4x^2+12xy-9y^2)$.
11. $(ax+by)(ax-by)(a^2x^2+b^2y^2)$.

Pokazać, że następujące wzory są prawdziwe:

12. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.
13. $(a-b)(b-c)(c-a)=bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)$.
14. $(a-b)^3+b^3-a^3=3ab(b-a)$.
15. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab(a^2+b^2)$.
16. $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(b+c-a)^2=$ $=4(a^2+b^2+c^2)$.
17. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.
18. $\{(ax+by)^2+(ay-bx)^2\}\{(ax+by)^2-(ay+bx)^2\}=$ $(a^4-b^4)(x^4-y^4)$.

XI.

Rozkład na czynniki.

88. W poprzednim rozdziale poznaliśmy niektóre ogólne wzory, wypadające z mnożenia; też same wzory mogą być uważane w związku z dzieleniem, gdyż każde zadanie na mnożenie daje jedno, lub kilka zadań na dzielenie. Zastosujemy teraz znalezione wzory ogólne, do rozwiązania pytania: jak znaleść dla danego wyrażenia algebraicznego te wyrażenia, przez które ono dzieli się bez reszty, czyli innemi słowy, *jak rozłożyć dane wyrażenie na czynniki, z których się ono składa.*

89. Tak naprzykład z wzoru (3), paragrafu 80, mamy:

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

$$a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^4-b^4)=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b).$$

Stąd widzimy, że a^8-b^8 jest iloczynem czterech czynników a^4+b^4, a^2+b^2, $a+b$ i $a-b$. Więc a^8-b^8 jest podzielne przez każdy z tych czynników, lub przez iloczyn którychkolwiek dwóch z nich, lub też przez iloczyn którychkolwiek trzech z nich.

Dalej jeszcze

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)=$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4.$$

Tym sposobem $a^4+a^2b^2+b^4$ jest iloczynem dwóch czynników a^2+ab+b^2 i a^2-ab+b^2, jest więc podzielne przez każdy z tychże czynników.

Oprócz tych wzorów, które poprzednio podaliśmy, umieszczamy poniżej jeszcze niektóre, częstego w algebrze użycia.

90. Następujące wypadki można łatwo sprawdzić przez dzielenie:

$$\frac{x-y}{x-y}=1,$$
$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y,$$
$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2,$$
$$\frac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+x^2y+xy^2+y^3,$$

i tak dalej.

I również:

$$\frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y,$$
$$\frac{x^4-y^4}{x+y}=x^3-x^2y+xy^2-y^3,$$
$$\frac{x^6-y^6}{x+y}=x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5;$$

i tak dalej.

Jeszcze:

$$\frac{x+y}{x+y}=1,$$
$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2,$$

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}=x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4\,,$$

i tak dalej.

Działania te możemy posunąć tak daleko jak zechcemy, a rezultaty tych działań można opisać za pomocą następujących twierdzeń:

$x^n - y^n$ jest podzielne przez $x - y$, gdy n oznacza *jakąkolwiek* liczbę całkowitą.

$x^n - y^n$ jest podzielne przez $x + y$, gdy n jest liczbą *parzystą*.

$x^n + y^n$ jest podzielne przez $x + y$, gdy n jest liczbą *nieparzystą*.

Moglibyśmy też wyrazić słowami twierdzenia, wykazujące jaką postać ma iloraz w każdym z powyższych trzech przypadków; lecz czytelnik sam łatwo będzie w stanie zapamiętać tę postać, przez dokładne przyjrzenie się otrzymanym wypadkom, posuwając zresztą te działania dalej jeszcze, jeżeli uważać będzie to za potrzebne:

Dodamy tu jeszcze, że $x^n + y^n$ nie jest *nigdy* podzielne przez $x - y$, i nie jest podzielne przez $x + y$, gdy n jest liczbą *parzystą*. [1])

[1]) Dla uzupełnienia tego rozdziału podajemy krótki dowód wyrażonych w tekście twierdzeń.

Podzielmy $x^n - y^n$ przez $x - y$:

$$\begin{array}{l|l}
x^n - y^n & x-y \\ \hline
-x^n \mp x^{n-1}y & x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots+y^{n-1} \\ \cline{1-1}
\quad x^{n-1}y - y^n & \\
\quad -x^{n-1}y \mp x^{n-2}y^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad x^{n-2}y^2 - y^n & \\
\qquad -x^{n-2}y^2 \mp x^{n-3}y^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad x^{n-3}y^3 - y^n\,. &
\end{array}$$

91. Aby łatwo spamiętać powyższe twierdzenia, należy w każdym z czterech przypadków wybrać najprostszy i do niego odnieść wszystkie pozostałe. Tak naprzykład przypuśćmy, że chcemy poznać czy $x^7 - y^7$ jest podzielne przez $x - y$ lub przez $x + y$; wykładnik 7 jest liczbą *nieparzystą*, i najprostszy przypadek tego rodzaju jest $x - y$; — wyrażenie które jest podzielne przez $x - y$, ale nie jest podzielne przez $x + y$; stąd wnosimy, że $x^7 - y^7$ dzieli się bez reszty przez $x - y$, ale nie przez $x + y$. Podobnież: gdyby dane wyrażenie było $x^8 - y^8$; wykładnik 8 jest liczbą *parzystą*, najprostszy zaś przypadek tego rodzaju jest $x^2 - y^2$, wyrażenie, które jest podzielne zarazem przez $x + y$ jak i przez $x - y$; stąd wypada, że $x^8 - y^8$ jest podzielne i przez $x - y$ i przez $x + y$.

92. Dalsze przykłady rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki:

$$x^6 - y^6 = (x^3+y^3)(x^3-y^3) =$$
$$= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2).$$
$$8b^3-27c^3=(2b)^3-(3c)^3=(2b-3c)\,\{(2b)^2+2b\times 3c+(3c)^2\}=$$
$$=(2b-3c)(4b^2+6bc+9c^2).$$
$$4\,(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=$$
$$=\{2\,(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\}$$
$$\{2\,(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\}=$$
$$=\{2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2\}$$
$$\{2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2\}=$$
$$=\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}=$$
$$=(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a-b+c+d)(b+c+d-a).$$

Z wykonanego dzielenia widzimy, że każda reszta składa się z dwóch wyrazów: jednym z nich jest stale $-y^n$, w drugim zaś, złożonym z dwóch czynników, wykładnik przy x po każdem dzieleniu zmniejsza się o 1, wykładnik przy y powiększa się o 1. Po wykonaniu więc n dzieleń, x zupełnie zniknie z tego wyrazu, a wykładuik przy y wzrośnie do n. Odpowiednia reszta po n-em dzieleniu będzie przeto $y^n - y^n$, t. j. zero. Liczba wyrazów w ilorazie równać się będzie n. Podobnego rodzaju rozumowanie, zastosowane do każdego z wymienionych przypadków dowiedzie nam prawdziwości twierdzeń wspomnianych.

93. Przypuśćmy, że mamy do podzielenia
$(x^2 - 5xy + 6y^2)(x - 4y)$ przez $x^2 - 7xy + 12y^2$.
Moglibyśmy pomnożyć najprzód $x^2 - 5xy + 6y^2$ przez $x-4y$ i następnie iloczyn podzielić przez $x^2 - 7xy + 12y^2$. Lecz rodzaj pytania nasuwa nam myśl sprobowania najprzód, czy $x - 4y$ nie jest czynnikiem trójmianu $x^2 - 7xy + 12y^2$; i w samej rzeczy znajdujemy, że $x^2 - 7xy + 12y^2 = (x - 3y)(x - 4y)$. Zatem:

$$\frac{(x^2 - 5xy + 6y^2)(x - 4y)}{(x - 3y)(x - 4y)} = \frac{x^2 - 5xy + 6y^2}{x - 3y};$$

i za pomocą dzielenia znajdujemy, że:

$$\frac{x^2 - 5xy + 6y^2}{x - 3y} = x - 2y.$$

PRZYKŁADY XI.

Dodać do siebie następujące wyrażenia:

1. $a(a + b - c)$, $b(b + c - a)$, $c(a + c - b)$.
2. $a(a - b + c)$, $b(b - c + a)$, $c(c - a + b)$.
3. $(a+b)x + (a+c)y$, $(b-c)x + (b-c)y$, $(c-a)x + (b-a)y$.
4. $2(a + b - c)x + (a + b)y + 2az$,
   $2(a + c - b)x + (a + c)y + 2bz$,
   $2(b + c - a)x + (b + c)y + 2cz$.

Uprościć następujące wyrażenia:

5. $(a + b)(b + c) - (c + d)(d + a) - (a + c)(b - d)$.
6. $(x + 3)^3 - 3(x + 2)^3 + 3(x + 1)^3 - x^3$.
7. $\frac{(a + b)(a + c) - (b + d)(d + c)}{a - d}$.

Podzielić:

8. $x^6 + y^6 - 2x^3y^3$ przez $(x - y)^2$.
9. $x^6 + y^6 + 2x^3y^3$ przez $(x + y)^2$.
10. $a^8 + a^4b^4 + b^8$ przez $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.
11. $a^8 - b^8 + a^2b^2(a^4 - b^4)$ przez $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

Rozłożyć następujące wyrażenia na czynniki:

12. $x^4 - 81$.
13. $x^3 + 125$.
14. $x^8 - 256$.
15. $x^6 - 64$.

XII.

Największy wspólny dzielnik.

94. W arytmetyce ta liczba całkowita, która dzieli bez reszty drugą liczbę całkowitą, nazywa się *dzielnikiem* tej ostatniej; liczba całkowita, która dzieli dwie lub więcej liczb całkowitych, nazywa się ich *wspólnym dzielnikiem.*

W algebrze wyrażenie, które dzieli bez reszty inne wyrażenie algebraiczne, nazywa się *dzielnikiem* tego ostatniego; wyrażenie zaś, przez które dzieli się bez reszty dwa lub więcej wyrażeń algebraicznych, nazywa się ich *wspólnym dzielnikiem* (lub wspólną miarą).

95. W arytmetyce *największym wspólnym dzielnikiem* (lub największą wspólną miarą) dwóch lub więcej liczb, jest największa liczba całkowita, przez którą wszystkie dadzą się podzielić bez reszty.

Wyrażenie: największy wspólny dzielnik, jest także używane w algebrze, lecz tutaj nie jest ono zupełnie stosowne, gdyż wyrazy: *większy* i *mniejszy* rzadko dadzą się zastosować do tych wyrażeń algebraicznych, w których nie są dane pewne oznaczone wartości na rozmaite głoski wchodzące do nich. Lepiej byłoby mówić o *najwyższym wspólnym dzielniku*; lecz zgodnie z przyjętym zwyczajem zachowamy wyrażenie: *największy wspólny dzielnik* (lub *największa wspólna miara*).

Zamiast wyrazów: największy wspólny dzielnik, często używać będziemy dla krótkości głosek: *N. W. D.*

Objaśnimy teraz, w jakiem znaczeniu wyrażenie *N. W. D.* jest używane w algebrze.

96. Mówimy, że największy wspólny dzielnik dwóch lub więcej jednomianów: jest to *największe wyrażenie algebraiczne, przez które one wszystkie dadzą się podzielić*; określenie to stanie się zupełnie zrozumiałem po podaniu i objaśnieniu przykładami prawidła na wynajdywanie największego wspólnego dzielnika dla jednomianów.

Prawidło na wynalezienie *N. W. D.* jednomianów jest takie: *należy znaleść N. W. D. wszystkich współczynników liczebnych za pomocą prawideł arytmetyki; następnie, do tak znalezionej liczby należy dopisać każdą głoskę, wspólną wszystkim wyrażeniom, i dać każdej głosce najmniejszy odpowiedni wykładnik, jaki ona ma w tych wyrażeniach.*

97. Naprzykład: mamy znaleść *N. W. D.* dla $16a^4b^2c$ i $20a^3b^3d$. Tutaj współczynniki liczebne są 16 i 20, a ich *N. W. D.* jest 4. Głoski wspólne obu jednomianom są a i b, najmniejszy wykładnik przy a jest 3, a najmniejszy wykładnik przy b jest 2. Tym sposobem szukany *N. W. D.* będzie $4a^3b^2$.

Szukajmy jeszcze *N. W. D.* dla $8a^2b^3c^2x^5yz^3$, $12a^4bcx^2y^3$, i $16a^3c^3x^2y^4$. Współczynniki liczebne są 8, 12 i 16; ich *N. W. D.* jest 4. Głoski wspólne wszystkim wyrażeniom są: a, c, x i y; ich najmniejsze wykładniki są odpowiednio: 2, 1, 2 i 1. Tym sposobem szukany *N. W. D.* będzie $4a^2cx^2y$.

98. Następujące twierdzenie daje najlepsze praktyczne pojęcie o tem co rozumiemy przez największy wspólny dzielnik w algebrze, gdyż ono pokazuje znaczenie tutaj wyrazu *największy*. *Gdy dwa lub więcej wyrażeń algebraicznych podzielimy przez ich największy wspólny dzielnik, wtedy otrzymane ilorazy nie mają żadnego wspólnego dzielnika.*

Weźmy pierwszy przykład paragrafu 97, i podzielmy podane tam jednomiany przez ich *N. W. D.*, otrzymamy ilorazy $4ac$ i $5bd$, które nie mają żadnego wspólnego dzielnika.

Podobnież, jeżeli w drugim przykładzie paragrafu 97 podzielimy dane jednomiany przez ich *N. W. D.*, otrzymamy na ilorazy $2b^3cx^3z^3$, $3a^2by^2$, i $4ac^2y^3$, które również nie mają żadnego wspólnego dzielnika.

99. To, co było powiedziane w poprzednim paragrafie, przy pomocy rozdziału o rozłożeniu na czynniki, daje nam w wielu razach możność oznaczenia *N. W. D. wielomianów.* Przypuśćmy np., że szukamy *N. W. D.* dla $4a^2\,(a+b)^2$ i $6ab\,(a^2-b^2)$. Tutaj $2a$ jest *N. W. D.* czynników $4a^2$ i $6ab$, a $a+b$ jest czynnikiem zarazem i $(a+b)^2$, i a^2-b^2 i to jedynym czynnikiem wspólnym. Iloczyn więc $2a\,(a+b)$ jest *N. W. D.* danych wyrażeń.

Lecz ten sposób nie może być w ogólności zastosowany do jakichkolwiek wielomianów, gdyż ogólna teorya rozkładu wielomianów na czynniki o wiele przechodzi po za granicę tych wiadomości, jakie początkujący posiada. Musimy więc do tego wyszukać innego sposobu; -- i następujące określenia i prawidła zawierają inne rozwiązanie tego zadania.

100. Największy wspólny dzielnik wielomianów możemy określić w następujący sposób. *Jeżeli dwa lub więcej wielomianów zawiera potęgi pewnej głoski wspólnej, wtedy ten z czynników, dzielących wszystkie te wielomiany, w którym ta głoska wchodzi z najwyższym wykładnikiem, nazywa się ich największym wspólnym dzielnikiem.*

101. Na wynalezienie największego wspólnego dzielnika dla dwóch wielomianów mamy takie prawidło:

Niech A i B oznaczają dwa wielomiany; uporządkujmy je podług potęg malejących pewnej wspólnej głoski. Przypuśćmy, że wykładnik najwyższej potęgi tej głoski w A nie jest mniejszy, aniżeli wykładnik najwyższej potęgi tejże głoski w B. Podzielmy A przez B, następnie B przez resztę; potem tę resztę pierwszą przez resztę drugą, — i tak dalej postępujmy dotąd, dopóki nie pozostanie żadnej reszty, — wtedy ostatni dzielnik będzie największym wspólnym dzielnikiem szukanym.

102. Naprzykład szukajmy *N. W. D.* dla x^2-4x+3 i $4x^3-9x^2-15x+18$.

$$
\begin{array}{r|l}
4x^3-\ 9x^2-15x+18 & x^2-4x+3 \\ \cline{2-2}
-4x^3+16x^2\pm12x & 4x\ +7 \\ \cline{1-1}
7x^2-27x+18 & \\
-7x^2\mp28x\pm21 & \\ \cline{1-1}
x-3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-4x+3 & x-3 \\ \cline{2-2}
-x^2\mp3x & x-1 \\ \cline{1-1}
-\ x+3 & \\
\mp\ x\pm3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Więc $x-3$ jest szukanym *N. W. D.*

103. Prawidło, podane w paragrafie 101, opiera się na dwóch następnych zasadach:

(1) Jeżeli P jest dzielnikiem dla A, wtedy będzie ono dzielnikiem i dla mA. Gdyż: jeżeli a oznacza iloraz z podzielenia A przez P, to $A=aP$, a przeto $mA=maP$, więc P jest dzielnikiem dla mA.

(2) Jeżeli P jest dzielnikiem dla A i B, wtedy będzie ono dzielnikiem dla $mA\pm nB$. W samej rzeczy: skoro P jest dzielnikiem dla A i dla B, to możemy przyjąć, że $A=aP$, i $B=bP$. Zatem $mA\pm nB=(ma\pm nb)P$, czyli P jest dzielnikiem dla $mA\pm nB$.

104. Teraz dopiero możemy uzasadnić prawidło, podane w § 101.

Niech A i B oznaczają dwa wyrażenia dane. Podzielmy A przez B i oznaczmy przez p iloraz a przez C resztę. Podzielmy B przez C i oznaczmy przez q iloraz a przez D resztę. Podzielmy dalej C przez D, i przypuśćmy, że nie pozostaje żadna reszta, a r jest ilorazem.

Wtedy mamy następujące wyrażenia:

$$A=pB+C,\quad B=qC+D,\quad C=rD.$$

Pokażemy najprzód, że D jest *wspólnym* dzielnikiem dla A i B. Ponieważ $C=rD$, przeto D jest dzielnikiem dla C, a zatem, podług § 103, jest także dzielnikiem dla qC, a przeto i dla $qC+D$, czyli dla B.

I dalej: ponieważ D jest dzielnikiem dla C i B, przeto i dla $pB+C$ czyli dla A. I tak D jest dzielnikiem dla A i B.

Poprzednie rozumowanie pokazuje nam, że D jest *wspólnym* dzielnikiem dla A i B; pozostaje teraz dowieść, że ono jest ich *największym* wspólnym dzielnikiem.

Na zasadzie § 103 każdy wspólny dzielnik dla A i B, jest dzielnikiem i dla $A-pB$, to jest dla C; a zatem każdy wspólny dzielnik dla A i B jest zarazem wspólnym dzielnikiem dla B i C. Podobnież: każdy wspólny dzielnik dla B i C, jest zarazem wspólnym dzielnikiem dla C i D. Tym sposobem każdy wspólny dzielnik dla A i B jest zarazem dzielnikiem i dla D. Lecz żadne wyrażenie wyższego stopnia aniżeli D nie może dzielić D bez reszty. A zatem D jest *największym* wspólnym dzielnikiem dla A i B.

105. Widoczną jest rzeczą, że *każdy dzielnik wspólnego dzielnika dwóch lub więcej wyrażeń, jest zarazem wspólnym dzielnikiem tychże wyrażeń.*

106. Dowiedziono w § 104, że każdy wspólny dzielnik dla A i B, jest zarazem dzielnikiem i dla D; to jest: *Każdy wspólny dzielnik dla dwóch wyrażeń jest zarazem dzielnikiem i największego wspólnego dzielnika tychże wyrażeń.*

107. Podamy teraz i objaśnimy przykładami prawidło, za pomocą którego można uniknąć ułamków w ilorazach i wprowadzić uproszczenia w wykonywaniu roboty. Dowodzenie tego prawidła można znaleść w obszerniejszych dziełach o algebrze.

Zanim napiszemy nowy wyraz w którymkolwiek ilorazie, *możemy podzielić dzielnik, lub dzielną przez jakiekolwiek wyrażenie, ale nie mające żadnego czynnika wspólnego z wyrażeniami, dla których szukamy największego wspólnego dziel-*

nika; albo też *możemy pomnożyć dzielną w któremkolwiek miejscu roboty przez każde wyrażenie, które nie zawiera w sobie czynnika wchodzącego i do dzielnika.*

108. Naprzykład: szukajmy *N. W. D.* dla $2x^2-7x+5$ i $3x^2-7x+4$. Weźmy tutaj $2x^2-7x+5$ jako dzielnik; dzieląc wszakże $3x^2$ przez $2x^2$, otrzymujemy na iloraz ułamek; aby tego uniknąć, mnożymy dzielną przez 2 i następnie dzielimy.

$$\begin{array}{r|l}
6x^2-14x+8 & 2x^2-7x+5 \\ \cline{2-2}
-6x^2\mp 21x\pm 15 & 3 \\ \cline{1-1}
7x-7 &
\end{array}$$

Jeżeli teraz przyjmiemy $7x-7$ za dzielnik, a $2x^2-7x+5$ za dzielną, wtedy pierwszy wyraz ilorazu będzie ułamkowym; lecz czynnik 7 znajduje się we wszystkich wyrazach tego dzielnika, opuszczamy go i dopiero wtedy dzielimy.

$$\begin{array}{r|l}
2x^2-7x+5 & x-1 \\ \cline{2-2}
-2x^2\mp 2x & 2x-5 \\ \cline{1-1}
-5x+5 & \\
\mp 5x\pm 5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Tym sposobem otrzymamy $x-1$ jako szukany *N. W. D.*

Tutaj należy zauważyć, że w początku działania użyliśmy drugiej części prawidła, podanego w § 107, a w dalszym ciągu tegoż działania pierwszej części prawidła. Należy używać zawsze pierwszej części prawidła, jeżeli tylko to jest możliwem; w przeciwnym zaś razie drugiej części. W wypowiedzeniu prawidła użyliśmy wyrazu *wyrażenie*, lecz w tych zadaniach jakie najczęściej przytrafiają się w praktyce i jakie uczący się mieć tutaj będzie do rozwiązania, czynniki które mają być wprowadzone lub opuszczone będą prawie zawsze *czynnikami liczebnymi*, jak to miało miejsce i w poprzednim przykładzie.

Drugi przykład: chcemy znaleść *N. W. D.* dla $2x^4-7x^3-4x^2+x-4$ i $3x^4-11x^3-2x^2-4x-16$.

Pomnóżmy drugi wielomian przez 2, i weźmy go za dzielną.

$$\begin{array}{r|l}
6x^4-22x^3-4x^2-8x-32 & 2x^4-7x^3-4x^2+x-4 \\ \cline{2-2}
-6x^4\mp 21x^3\mp 12x^2\pm 3x\mp 12 & 3 \\ \cline{1-1}
-x^3+8x^2-11x-20 &
\end{array}$$

Możemy pomnożyć każdy wyraz tej reszty przez -1, zanim przyjmiemy ją za nowy dzielnik, to jest możemy zmienić w niej wszystkie znaki na przeciwne.

$$\begin{array}{r|l}
2x^4-7x^3-4x^2+x-4 & x^3-8x^2+11x+20 \\ \cline{2-2}
-2x^4\mp 16x^3\pm 22x^2\pm 40x & 2x+9 \\ \cline{1-1}
9x^3-26x^2-39x-4 & \\
-9x^3\mp 72x^2\pm 99x\pm 180 & \\ \cline{1-1}
46x^2-138x-184 &
\end{array}$$

Tutaj 46 jest czynnikiem każdego wyrazu reszty; możemy więc przez niego podzielić tęż resztę, zanim użyjemy jej jako nowego dzielnika.

$$\begin{array}{r|l}
x^3-8x^2+11x+20 & x^2-3x-4 \\ \cline{2-2}
-x^3\mp 3x^2\mp 4x & x-5 \\ \cline{1-1}
-5x^2+15x+20 & \\
\mp 5x^2\pm 15x\pm 20 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Tym sposobem x^2-3x-4 jest *N. W. D.* szukanym.

109. Przypuśćmy, że dane wyrażenia zawierają wspólny czynnik F, widoczny na pierwszy rzut oka; wtedy można uczynić $A=aF$ i $B=bF$. W tym razie na zasadzie § 106, F będzie czynnikiem *N. W. D.* Należy zatem znaleść *N. W. D.* dla a i b i pomnożyć go przez F; otrzymany iloczyn będzie *N. W. D.* dla A i B.

110. Przypuśćmy teraz, że mamy znaleść *N. W. D.* trzech wyrażeń A, B i C. W tym celu znajdujemy *N. W. D.* którychkolwiek dwóch z tych wyrażeń, np. A i B; niech D

oznacza ten *N. W. D.*, następnie wynajdujemy *N. W. D.* dla D i C, i ten ostatni będzie *N. W. D.* dla A, B i C.

Gdyż, na zasadzie § 105, każdy wspólny dzielnik dla D i C, jest wspólnym dzielnikiem dla A, B i C; a na zasadzie § 106 każdy wspólny dzielnik dla A, B i C jest wspólnym dzielnikiem dla D i C. Przeto *N. W. D.* dla D i C jest *N. W. D.* dla A, B i C.

111. W podobny sposób można wynaleść *N. W. D.* *czterech* wyrażeń. Albo też: możemy znaleść *N. W. D.* dwóch którychkolwiek z danych wyrażeń, i także *N. W. D.* dwóch pozostałych wyrażeń; wtedy *N. W. D.* dwóch tak otrzymanych wypadków, będzie *N. W. D.* czterech danych wyrażeń

PRZYKŁADY XII.

Znaleść największy wspólny dzielnik następujących wyrażeń:

1. $16a^2b^3$, $20a^3b^2$. 2. $35a^2b^3x^3y^4$, $49a^2b^4x^4y^3$.
3. $6(x+1)^3$, $9(x^2-1)$.
4. $x^2+2x-120$, $x^2-2x-80$
5. $x^3-41x-30$, $x^3-11x^2+25x+25$.
6. $x^3+7x^2+17x+15$, $x^3+8x^2+19x+12$.
7. $4(x^2-x+1)$, $3(x^4+x^2+1)$.
8. x^3-4x^2+2x+3, $2x^4-9x^3+12x^2-7$.
9. x^4-1, $3x^5+2x^4+4x^3+2x^2+x$.
10. $x^2-3x-70$, $x^3-39x+70$, $x^3-48x+7$.

XIII.

Najmniejsza wspólna wielokrotna.

112. W arytmetyce ta liczba całkowita, która się da podzielić bez reszty przez inną liczbę całkowitą, nazywa się wielokrotną tej ostatniej; ta liczba całkowita, która się da

podzielić przez dwie lub kilka liczb całkowitych, nazywa się ich *wspólną wielokrotną*.

113. W arytmetyce *najmniejsza wspólna wielokrotna* dwóch lub więcej liczb całkowitych, jest najmniejszą z liczb całkowitych, które się dają podzielić przez te ostatnie liczby wszystkie. Wyrażenie: najmniejsza wspólna wielokrotna, jest także używane i w algebrze, lecz tutaj jest niezupełnie właściwe (patrz § 95). Głosek n. W. W. używać będziemy często dla krótkości, zamiast tego wyrażenia.

Objaśnimy teraz, w jakiem znaczeniu wyrażenie to jest używane w algebrze.

114. Mówimy, że najmniejszą wspólną wielokrotną dwóch lub więcej jednomianów nazywa się wyrażenie najniższego stopnia, które przez *wszystkie te jednomiany może być podzielone*; określenie to stanie się w zupełności zrozumiałem po podaniu prawidła i przykładów na wynajdywanie najmniejszej wspólnej wielokrotnej jednomianów.

Prawidło na wynajdywanie n. W. W. jednomianów jest następne.

Należy znaleść za pomocą zasad arytmetyki n. W. W. dla współczynników liczebnych; następnie za tą liczbą napisać każdą z głosek znajdujących się w danych jednomianach i dać każdej głosce odpowiednio najwyższy wykładnik, jaki ona ma w tych jednomianach.

115. Przypuśćmy naprzykład, że szukamy n. W. W. dla $16a^4bc$ i $20a^3b^3d$. Tutaj współczynnikami liczebnymi są 16 i 20, a ich n. W. W. jest 80. Głoski, które się znajdują w tych wyrażeniach są a, b, c i d; ich najwyższe wykładniki są odpowiednio 4, 3, 1 i 1. Tym sposobem otrzymujemy $80a^4b^3cd$ jako szukaną n. W. W.

Przypuśćmy dalej, że chcemy znaleść n. W. W. dla $8a^2b^3c^2x^3yz^3$, $12a^4bcx^2y^3$ i $16a^3c^3x^2y^4$. Tutaj n. W. W. współczynników liczebnych jest 48. Głoski, które się znajdują w tych wyrażeniach, są a, b, c, x, y, z, a ich najwyższe wykładniki są odpowiadnio 4, 3, 3, 5, 4 i 3. Tym sposobem n. W. W. szukana będzie: $48a^4b^3c^3x^5y^4z^3$.

116. Następujące twierdzenie daje najlepsze pojęcie o tem, co się rozumie w algebrze pod wyrazem najmniejsza wspólna wielokrotna, i pokazuje zarazem znaczenie tutaj wyrazu *najmniejsza.*

Gdy najmniejsza wspólna wielokrotna dwóch lub więcej wyrażeń będzie podzielona przez też wyrażenia, wtedy otrzymane ilorazy nie będą miały żadnego wspólnego dzielnika.

I tak, jeżeli weźmiemy pod uwagę pierwszy przykład § 115 i podzielimy n. W. W. przez dane tam jednomiany, wtedy ilorazy będą $5b^2d$ i $4ac$, które nie mają żadnego wspólnego dzielnika.

Dalej, weźmy pod uwagę drugi przykład § 115 i podzielmy n. W. W. przez dane jednomiany; ilorazy będą $6a^2cy^3$, $4b^2c^2x^4yz^3$ i $3ab^3x^3z^3$, a one nie mają żadnego wspólnego dzielnika.

117. To, co było wyłożone w poprzednim paragrafie, z pomocą rozdziału o rozkładzie na czynniki daje w wielu razach możność znalezienia n. W. W. dla *wielomianów.* Naprzykład chcemy znaleść n. W. W. dla $4a^2(a+b)^2$ i $6ab(a^2—b^2)$. Najmniejsza wspólna wielokrotna dla $4a^2$ i $6ab$ jest $12a^2b$ Dalej zauważmy, że $(a+b)^2$ i $a^2 — b^2$ mają wspólny czynnik $a+b$; więc $(a+b)(a+b)(a—b)$ jest wielokrotne względem $(a+b)^2$ i $a^2—b^2$; dzieląc zaś to wyrażenie przez $(a+b)^2$ i $a^2 — b^2$ otrzymujemy ilorazy $a — b$, i $a+b$, które nie mają żadnego wspólnego dzielnika. Tym sposobem szukana n. W.W. będzie $12a^2b(a+b)^2(a—b)$.

118. Najmniejszą wspólną wielokrotną dwóch lub więcej wielomianów można określić w ten sposób: Przypuśćmy, że kilka wielomianów zawiera rozmaite potęgi pewnej wspólnej głoski; wtedy wyrażenie najniższego stopnia względem tej wspólnej głoski, dające się podzielić przez każdy z danych wielomianów, nazywa się ich najmniejszą wspólną wielokrotną.

119. Pokażemy teraz jak znaleść n. W. W. dla dwóch wielomianów. Wszakże zrozumienie zupełne dowodzenia poniżej zamieszczonego przedstawia dla początkującego pewne trudności.

Oznaczmy przez A i B dane dwa wyrażenia, i przez D ich największy wspólny dzielnik. Wtedy $A=aD$ i $B=bD$, gdzie a i b nie mają żadnego czynnika wspólnego, jak to wypada z samej natury największego wspólnego dzielnika. Przeto najmniejsza wspólna wielokrotna dla a i b jest ab. A zatem wyrażenie najniższego stopnia, które jest podzielne przez aD i bD jest abD. Lecz: $abD=Ab=Ba=\frac{AB}{D}$.

Stąd otrzymujemy następujące prawidło na wynalezienie n. W. W. dwóch wyrażeń: *Należy podzielić iloczyn tych dwóch wyrażeń przez ich N. W. D.* Lub też, to samo prawidło możemy wyrazić tak: Należy podzielić jedno z danych wyrażeń przez ich N. W. D. i iloraz *pomnożyć przez wyrażenie drugie.*

120. Naprzykład, szukamy n. W. W. dla $x^2 — 4x + 3$ i $4x^3 — 9x^2 — 15x + 18$.

N. W. D. jest tutaj $x — 3$ (§ 102). Podzielmy $x^2—4x+3$ przez $x — 3$; iloraz jest $x — 1$. A zatem n. W. W. szukana jest $(x — 1)(4x^3 — 9x^2 —15x + 18)$, co po wykonaniu mnożenia daje: $4x^4 — 13x^3 — 6x^2 + 33x — 18$.

Dogodniejszą jest często rzeczą przestawić n. W. W. pod postacią iloczynu wskazanego, złożonego z czynników, aniżeli jako ostateczny wypadek, powstały przez wykonane mnożenie. Wiemy że *N. W. D.*, w tym przypadku $x — 3$ dzieli bez reszty $4x^3 — 9x^2 — 15x + 18$; przez dzielenie znajdujemy na iloraz $4x^2 + 3x — 6$. Stąd n. W. W. jest:

$$(x — 3)(x — 1)(4x^2 + 3x — 6).$$

Jako inny przykład, przypuśćmy, że szukamy *n. W. W.* dla $2x^2 - 7x + 5$ i $3x^2 - 7x + 4$.

N. W. D. jest $x - 1$, patrz § 108.

Przeto:

$$(2x^2 - 7x + 5) : (x - 1) = 2x - 5,$$
$$(3x^2 - 7x + 4) : (x - 1) = 3x - 4,$$

n. W. W. będzie więc:

$$(x - 1)(2x - 5)(3x - 4).$$

121. Widoczną jest rzeczą, że *każda wielokrotna wspólnej wielokrotnej dla pewnej liczby wyrażeń, jest także wspólną wielokrotną dla tychże wyrażeń.*

122. *Każda wspólna wielokrotna dla dwóch wyrażeń, jest wielokrotną najmniejszej wspólnej wielokrotnej tychże wyrażeń.*

Niech A i B będą dwa wyrażenia, których *n. W. W.* jest M, i niech N oznacza jakąkolwiek inną wspólną wielokrotną. Przypuśćmy, jeżeli to jest możliwem, że N, podzielone przez M, daje na iloraz q i na resztę R. Wtedy $R = N - qM$. Lecz A i B są dzielnikami dla M i N, a zatem muszą one dzielić bez reszty i R (§ 103). Ale z natury dzielenia wypada, że R jest *niższego* stopnia aniżeli M; tym sposobem R byłoby wspólną wielokrotną dla A i B, niższego stopnia aniżeli ich *n. W. W.*, co podług określenia *n. W. W.* być nie może. Przy dzieleniu więc N przez M nie może pozostać żadnej reszty, czyli N jest wielokrotnem względem M.

123. Przypuśćmy teraz, że chcemy znaleść *n. W. W.* względem *trzech* wielomianów A, B, C. W tym celu wynajdźmy *n. W. W.* dwóch którychkolwiek z nich, np. A i B; niech M będzie tą *n. W. W.* wtedy *n. W. W.* względem M i C będzie żądaną *n. W. W.* względem A, B i C.

Gdyż każda wspólna wielokrotna dla M i C jest zarazem wspólną wielokrotną dla A, B i C na zasadzie § 121. Również: każda wspólna wielokrotna dla A i B jest wielokrotną względem M, na zasadzie § 122; stąd każda wspólna

wielokrotna dla M i C jest wspólną wielokrotną dla A, B i C. Przeto najmniejsza wspólna wielokrotna dla M i C będzie najmniejszą wspólną wielokrotną dla A, B i C.

124. W podobny sposób możemy znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną i dla czterech wielomianów.

125. Teorye największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotnej nie są niezbędnie potrzebne do następnych rozdziałów niniejszego dzieła; dlatego też jeżeli uczący się znajdzie w rozumieniu tych teoryi jakiekolwiek trudności, może je odłożyć do czasu, gdy studyować będzie teoryę równań. Za to zadania dołączone do poprzedniego i do niniejszego rozdziału muszą być starannie przerobione z powodu ćwiczeń, jakie podają we wszystkich zasadniczych działaniach algebry.

PRZYKŁADY XIII.

Znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną względem następujących wyrażeń:

1. $12a^3b^2c$, $18ab^2c^3$.
2. $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$.
3. $4a(a+b)$, $6b(a^3+b^3)$;
4. $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$.
5. $12x^2 + 5x - 3$, $6x^3 + x^2 - x$.
6. $x^3 - 7x - 6$, $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$.
7. $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $x^4 - 1$.
8. $4a^3b^2c$, $6ab^3c^2$, $18a^2bc^3$.
9. $15(a^2b - ab^2)$, $21(a^3 - ab^2)$, $35(ab^2 + b^3)$.
10. $x^2 - 1$, $x^2 + 1$, $x^4 + 1$, $x^8 - 1$.
11. $x^2 + 3x + 2$, $x^2 + 4x + 3$, $x^2 + 5x + 6$.

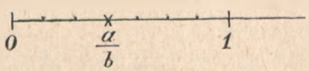
XIV.

U ł a m k i.

126. W tym i następnych czterech rozdziałach mówić będziemy o ułamkach: przekonamy się z nich, że prawidła na działania z ułamkami w algebrze zupełnie są podobne do tych prawideł, które już znamy z arytmetyki.

127. Przez wyrażenie $\frac{a}{b}$ oznaczamy, że pewna jedność jest podzielona na b części równych i że takich części bierzemy a. Tutaj $\frac{a}{b}$ nazywa się *ułamkiem*; a nazywa się *licznikiem*, b zaś *mianownikiem*. Tym sposobem mianownik pokazuje na ile części równych jedność została podzielona, a licznik — ile takich części bierzemy.

Figura załączona przedstawia $\frac{a}{b}$ przy $a = 3$, $b = 7$.



Każda całkowita, lub wyrażenie całkowite może być uważane jako ułamek, mający za mianownik jedność; tak np.

$$a = \frac{a}{1};\ b + c = \frac{b+c}{1}.$$

128. Aby wyrazić ułamek w postaci liczby całkowitej z ułamkiem, czyli ilości mieszanej, używamy następującego prawidła zarówno w algebrze, jak i w arytmetyce:

Należy podzielić licznik przez mianownik tak daleko jak tylko można, i dodać do ilorazu ułamek, mający za licznik resztę, a za mianownik dzielnik.

Przykłady:

$$\frac{24a}{7} = 3a + \frac{3a}{7}.$$

$$\frac{a^2 + 3ab}{a + b} = a + \frac{2ab}{a + b}.$$

$$\frac{x^3 - 6x + 14}{x^2 - 3x + 4} = x + 3 + \frac{-x + 2}{x^2 - 3x + 4} = x + 3 - \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 4}.$$

Zwracamy tu uwagę uczącego się na przejście od przedostatniego do ostatniego wyrażenia; przejście to jest w rzeczywistości przykładem na użycie nawiasu, mianowicie:

$$+(-x + 2) = -(x - 2).$$

129. Prawidło na pomnożenie ułamka przez liczbę całkowitą:

Należy albo pomnożyć licznik albo też podzielić mianownik przez tęż całkowitą.

W rzeczy samej: niech $\frac{a}{b}$ oznacza jakikolwiek ułamek, a c jakąkolwiek liczbę całkowitą; wtedy będzie $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$. Gdyż w każdym z ułamków $\frac{a}{b}$ i $\frac{ac}{b}$ jedność jest podzielona na jednakową liczbę części b; lecz w ułamku $\frac{ac}{b}$, c razy więcej tych części jest wziętych, aniżeli w $\frac{a}{b}$, stąd $\frac{ac}{b}$ jest c razy po $\frac{a}{b}$.

To jest dowodem pierwszego sposobu wyrażenia prawidła.

Dalej: niech $\frac{a}{bc}$ oznacza jakikolwiek ułamek, a c jakąkolwiek liczbę całkowitą; wtedy będzie $\frac{a}{bc} \times c = \frac{a}{b}$. Gdyż w każdym z ułamków $\frac{a}{bc}$ i $\frac{a}{b}$ taż sama liczba części jest wziętą, mianowicie a; lecz w ułamku $\frac{a}{b}$ każda część jest c razy większą od każdej części w ułamku $\frac{a}{bc}$, albowiem w $\frac{a}{bc}$ jedność jest podzielona na c razy więcej części, aniżeli w $\frac{a}{b}$; stąd $\frac{a}{b}$ jest c razy większe od $\frac{a}{bc}$.

I to jest dowodem drugiego sposobu wyrażenia prawidła. Rozumowanie powyższe można sobie ułatwić za pomocą rysunku.

130. Prawidło na podzielenie ułamka przez liczbę całkowitą:

Należy albo pomnożyć mianownik przez tę całkowitą, albo też licznik podzielić przez tęż całkowitą.

W samej rzeczy: niech $\frac{a}{b}$ oznacza jakikolwiek ułamek, a c jakąkolwiek liczbę całkowitą; wtedy będzie $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$.

Gdyż $\frac{a}{b}$ jest c razy większe od $\frac{a}{bc}$ na zasadzie § 129; zatem $\frac{a}{bc}$ jest $\frac{1}{c}$ częścią ułamku $\frac{a}{b}$.

To stanowi dowód pierwszego sposobu wyrażenia prawidła.

Dalej: niech znowu $\frac{ac}{b}$ oznacza pewien ułamek a c liczbę całkowitą; wtedy będzie $\frac{ac}{b} : c = \frac{a}{b}$. Gdyż $\frac{ac}{b}$ jest c razy większe od $\frac{a}{b}$ na zasadzie § 129; a przeto $\frac{a}{b}$ jest $\frac{1}{c}$ częścią ułamka $\frac{ac}{b}$.

I to jest dowodem drugiego sposobu wyrażenia powyższego prawidła.

131. *Jeżeli licznik i mianownik jakiegokolwiek ułamka pomnożymy przez jednę i tęż samę liczbę całkowitą, wtedy wartość ułamka nie zmieni się.*

Gdyż jeżeli licznik ułamka pomnożymy przez pewną całkowitą, wtedy ułamek będzie *pomnożony* przez tęż całkowitą; wypadek ten zostanie *podzielony* przez tęż samą całkowitą, gdy mianownik będzie przez nią pomnożony. Lecz gdy

jakąkolwiek liczbę pomnożymy, a następnie wypadek podzielimy przez jednę i tęż samę liczbę całkowitą, wtedy wypadek ostateczny mieć będzie taką samą wartość, co i dana liczba.

Toż samo może być wyrażone jeszcze w ten sposób: jeżeli licznik i mianownik ułamka *podzielimy* przez jednę i tęż samę liczbę całkowitą, wtedy wartość ułamka się nie zmieni.

Oba te sposoby ustnego wyrażenia powyższej własności ułamków, są zawarte w wyrażeniu algebraicznem: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Twierdzenie to jest bardzo wielkiej wagi: — wiele działań z ułamkami na niem się opiera, jak to zobaczymy w następujących rozdziałach.

PRZYKŁADY XIV.

Następujące ułamki wyrazić w postaci ilości mieszanych:

1. $\frac{25x}{7}$. 2. $\frac{36ac + 4c}{9}$.

3. $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3}$. 4. $\frac{x^4 + 1}{x - 1}$.

Pomnożyć:

5. $\frac{4a^2}{9b^2}$ przez $3b$. 6. $\frac{8(a^2+b^2)}{9(a^2-b^2)}$ przez $3(a-b)$.

Podzielić:

7. $\frac{8x^2}{3y}$ przez $2x$.

8. $\frac{10(a^3 - b^3)}{3(a + b)}$ przez $5(a^2 + ab + b^2)$.

9. $\frac{x^6 - 1}{x^2 + 1}$ przez $x^2 - x + 1$.

XV.

Skracanie ułamków i sprowadzanie ich do wspólnego mianownika.

132. Zastosujemy teraz twierdzenie, wyrażone w § 131 do dwóch ważnych działań: do wyrażania ułamków w najprostszej postaci czyli skracania ułamków, i. do sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika

133. Prawidło na skracanie ułamków: *Należy podzielić licznik i mianownik ułamka przez ich największy wspólny dzielnik.*

Naprzykład: wyrazić ułamek $\frac{16a^4b^2c}{20a^3b^3d}$ w najprostszej postaci. N. W. D. licznika i mianownika jest $4a^3b^2$; dzieląc tak licznik, jak i mianownik przez $4a^3b^2$, otrzymamy na żądany wypadek $\frac{4ac}{5bd}$. To jest: ułamek $\frac{4ac}{5bd}$ jest równy $\frac{16a^4b^2c}{20a^3b^3c}$, lecz jest wyrażony w prostszej postaci; a nawet mówimy, że jest wyrażonym w *najprostszej postaci*, gdyż już uproszczonym dalej być nie może za pomocą zasad, wyłożonych w § 131.

Dalszy przykład: wyrazić ułamek $\frac{x^2-4x+3}{4x^3-9x^2-15x+18}$ w najprostszej postaci. N. W. D. dla licznika i mianownika jest $x-3$; dzieląc i licznik i mianownik przez $x-3$, otrzymamy żądany wypadek: $\frac{x-1}{4x^2+3x-6}$.

W niektórych przypadkach możemy poznać, że licznik i mianownik mają wspólny czynnik, nie używając prawidła na wynajdywanie największego wspólnego dzielnika. Tak np.

$$\frac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}=\frac{(a-b+c)(a-b-c)}{(a+b+c)(a-b-c)}=\frac{a-b+c}{a+b+c}.$$

134. Prawidło na sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika. *Należy pomnożyć licznik i mianownik każdego z ułamków przez iloczyn mianowników pozostałych ułamków.*

Naprzykład: sprowadzić ułamki $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ i $\frac{e}{f}$ do jednakowego mianownika.

$$\frac{a}{b}=\frac{adf}{bdf};\ \frac{c}{d}=\frac{cbf}{dbf};\ \frac{e}{f}=\frac{ebd}{fbd}.$$

Tym sposobem $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{dbf}$ i $\frac{ebd}{fbd}$ są ułamkami tych samych odpowiednich wartości, co i ułamki $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ i $\frac{e}{f}$ i mają tenże sam mianownik bdf.

Prawidło podane powyżej w tym paragrafie, daje możność sprowadzenia zawsze ułamków do wspólnego mianownika, ale nie zawsze do *najmniejszego* wspólnego mianownika. Dla tego też dogodniejszą jest często rzeczą używać innego prawidła, które w tej chwili podamy, i za pomocą którego możemy ułamki sprowadzić do najmniejszego wspólnego mianownika.

135. Prawidło na sprowadzanie ułamków do najmniejszego (najniższego patrz § 95) wspólnego mianownika.

Należy znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną względem mianowników, i przyjąć ją za mianownik wspólny; dla wynalezienia zaś nowego licznika każdego ułamka należy pomnożyć każdy z liczników przez iloraz, powstały z podzielenia mianownika wspólnego przez mianownik, odpowiadający temuż licznikowi w danym ułamku.

Naprzykład: ułamki $\frac{a}{yz}$, $\frac{b}{zx}$, $\frac{c}{xy}$ sprowadzić do najmniejszego wspólnego mianownika. Najmniejsza wspólna wielokrotna względem mianowników jest xyz, i

$$\frac{a}{yz}=\frac{ax}{xyz};\ \frac{b}{zx}=\frac{by}{xyz},\ \frac{c}{xy}=\frac{cz}{xyz}.$$

PRZYKŁADY XV.

Następujące ułamki wyrazić w najprostszej postaci:

1. $\dfrac{12a^4b^2x}{18a^2b^2y}$. 2. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab}$.

3. $\dfrac{4(a+b)^2}{5(a^2-b^2)}$. 4. $\dfrac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}$.

5. $\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(a+c)x+ac}$. 6. $\dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+(c-a)x-ac}$.

7. $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^3-2ax^2+2a^2x-a^3}$.

Następujące ułamki sprowadzić do najmniejszego wspólnego mianownika:

8. $\dfrac{3}{4x}$, $\dfrac{4}{6x^2}$, $\dfrac{5}{12x^3}$, 9. $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{3}{4x+4}$, $\dfrac{x}{x^2-1}$.

10. $\dfrac{a}{x-a}$, $\dfrac{a+x}{x^2+ax+a^2}$, $\dfrac{ax}{x^3-a^3}$.

11. $\dfrac{1}{x^2-(a+b)x+ab}$, $\dfrac{1}{x^2-(a+c)x+ac}$, $\dfrac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$.

XVI.

Dodawanie i odejmowanie ułamków.

136. Jeżeli mamy do czynienia bezpośrednio z pewnemi wielkościami, np. z długościami, wtedy dodawanie i odejmowanie wielkości ułamkowych odbywa się zupełnie tak samo jak całkowitych: dodajemy je lub odejmujemy za pomocą cyrkla lub innego odpowiedniego przyrządu. Ażeby zastą-

pić to działanie rachunkiem, wprowadzamy następujące określenie dodawania i odejmowania ułamków. *Sumą [różnicą] dwóch ułamków, mających jednakowe mianowniki, nazywamy ułamek, mający tenże sam mianownik, a licznik równy sumie [różnicy] liczników ułamków danych.* Wyraża się to za pomocą wzoru $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$.

Zgodność obu działań łatwo uwidocznić za pomocą rysynku.

Prawidło na dodawanie i odejmowanie ułamków będzie więc: *Należy sprowadzić ułamki do wspólnego mianownika, i następnie dodać lub odjąć liczniki, i podpisać pod sumą, lub różnicą mianownik wspólny.*

Przykłady. Dodać $\frac{a+c}{b}$ do $\frac{a-c}{b}$. Ponieważ te ułamki mają już jednakowy mianownik, przeto:

$$\frac{a+c}{b}+\frac{a-c}{b}=\frac{a+c+a-c}{b}=\frac{2a}{b}.$$

Od: $\frac{4a-3b}{c}$ odjąć $\frac{3a-4b}{c}$.

$$\frac{4a-3b}{c}-\frac{3a-4b}{c}=\frac{4a-3b-(3a-4b)}{c}=$$
$$=\frac{4a-3b-3a+4b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Wszystkie działania uczący się powinien wykonywać *w zupełności*, tak jak to jest pokazane w ostatnim przykładzie w celu uniknięcia pomyłek.

Dodać: $\frac{c}{a+b}$ do $\frac{c}{a-b}$.

Tutaj mianownikiem wspólnym będzie iloczyn z $a+b$ przez $a-b$, to jest a^2-b^2.

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c(a-b)}{a^2-b^2};\ \frac{c}{a-b}=\frac{c(a+b)}{a^2-b^2}.$$

Przeto $\frac{c}{a+b}+\frac{c}{a-b}=\frac{c(a-b)+c(a+b)}{a^2-b^2}=$

$$=\frac{ca-cb+ca+cb}{a^2-b^2}=\frac{2ca}{a^2-b^2}.$$

Od: $\frac{a+b}{a-b}$ odjąć: $\frac{a-b}{a+b}$.

Mianownikiem wspólnym jest a^2-b^2.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2};\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}.$$

Przeto:

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Od: $\frac{x+1}{x^2-4x+3}$ odjąć $\frac{4x^2-3x+2}{4x^3-9x^2-15x+18}$.

Na zasadzie § 120, najmniejsza wspólna wielokrotna mianowników jest:

$$(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6);$$

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{(x+1)(4x^2+3x-6)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)},$$

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^3-9x^2-15x+18}=\frac{(4x^2-3x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}.$$

Przeto:

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}-\frac{4x^2-3x+2}{4x^3-9x^2-15x+18}=$$

$$=\frac{(x+1)(4x^2+3x-6)-(4x^2-3x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}=$$

$$=\frac{4x^3+7x^2-3x-6-(4x^3-7x^2+5x-2)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}$$

$$=\frac{14x^2-8x-4}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}.$$

137. Niekiedy wypada nam *zamienić ilość mieszaną na ułamek*; jest to po prostu jeden z przypadków dodawania lub odejmowania ułamków.

Przykłady:

$$a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}.$$

$$a+\frac{2ab}{a+b}=\frac{a}{1}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{a(a+b)}{a+b}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{a^2+3ab}{a+b}.$$

$$x+3-\frac{x-2}{x^2-3x+4}=\frac{x+3}{1}-\frac{x-2}{x^2-3x+4}=$$

$$=\frac{x^3-5x+12-(x-2)}{x^2-3x+4}=\frac{x^3-5x+12-x+2}{x^2-3x+4}=$$

$$=\frac{x^3-6x+14}{x^2-3x+4}.$$

138. Mogą się także przytrafić wyrażenia, w których należy wykonać i dodawanie i odejmowanie. Tak naprzykład, przypuśćmy, że mamy uprościć:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{ab}{a^2-b^2}-\frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

najmniejsza wspólna wielokrotna dla mianowników będzie: $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$, to jest a^4-b^4.

$$\frac{a}{a+b}=\frac{a(a-b)(a^2+b^2)}{a^4-b^4}=\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3}{a^4-b^4},$$

$$\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{ab(a^2+b^2)}{a^4-b^4}=\frac{a^3b+ab^3}{a^4-b^4},$$

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4}=\frac{a^4-a^2b^2}{a^4-b^4}.$$

Przeto: $\frac{a}{a+b}+\frac{ab}{a^2-b^2}-\frac{a^2}{a^2+b^2}=$

$$=\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+a^3b+ab^3-(a^4-a^2b^2)}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+a^3b+ab^3-a^4+a^2b^2}{a^4-b^4}=\frac{2a^2b^2}{a^4-b^4}.$$

139. W tym rozdziale pokazaliśmy, jakim sposobem można kilka ułamków połączyć w jeden.

Odwrotnie: można jeden ułamek rozłożyć na kilka ułamków, jeżeli to uważamy za potrzebne. Naprzykład:

$$\frac{3bc-4ac+5ab}{abc}=\frac{3bc}{abc}-\frac{4ac}{abc}+\frac{5ab}{abc}=\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}.$$

PRZYKŁADY XVI.

Znaleść wartości następujących wyrażeń:

1. $\frac{3a-5b}{4}+\frac{2a-b-c}{3}+\frac{a+b+c}{12}$.
2. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}$. 3. $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}$.
4. $\frac{a}{a-x}+\frac{3a}{a+x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}$.
5. $\frac{2b-a}{x-b}+\frac{b-2a}{x+b}+\frac{3x(a-b)}{x^2-b^2}$.
6. $x-\frac{x^2}{x+1}+\frac{x}{x-1}$.
7. $\frac{1}{x-y}+\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}+\frac{xy-2x^2}{x^3-y^3}$.
8. $\frac{1}{x-3a}-\frac{1}{x+3a}+\frac{3}{x+a}-\frac{3}{x-a}$.

XVII.

Mnożenie ułamków.

140. *Przez iloczyn dwóch ułamków rozumiemy ułamek, którego licznik jest iloczynem liczników, a mianownik iloczynem mianowników ułamków danych.* Określenie to można wyrazić za pomocą następującego wzoru:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

W przypadku szczególnym, kiedy oba mianowniki są równe jedności, wzór ten przedstawia mnożenie liczb całkowitych, gdyż $\frac{a}{1}=a$, $\frac{c}{1}=c$, $\frac{ac}{1}=ac$; jeżeli jeden z mianowników np. d jest równy jedności, drugi różny od jedności, wtedy otrzymamy wzór § 129 na mnożenie ułamka przez liczbę całkowitą:

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}.$$

Określenie tutaj podane jest więc zgodne z tem, co dotąd wiemy o mnożeniu. Sposób mnożenia więcej niż dwóch ułamków łatwo z powyższego określenia wyprowadzić.

141. W § poprzedzającym pierwszy raz mieliśmy do czynienia z mnożnikiem ułamkowym. Ażeby znaczenie jego zrozumieć, zauważmy, że podług § 129

$$\frac{ac}{bd}=\frac{a}{bd}\cdot c,$$

zaś podług § 130:

$$\frac{a}{bd}=\frac{a}{b}:d.$$

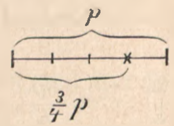
Jeżeli więc $\frac{a}{b}$ podzielimy na d części równych, to każda z tych części będzie $\frac{a}{bd}$; jeżeli części takich weźmiemy c, to otrzymamy $\frac{ac}{bd}$. Innemi słowy:

Jeżeli mnożnikiem jest ułamek, wtedy dla otrzymania iloczynu należy mnożną podzielić na tyle części równych, ile jedności zawiera mianownik mnożnika, i części tych wziąć tyle, ile jedności zawiera licznik mnożnika.

Mnożna może być przytem równie dobrze całkowitą jak ułamkową.

Jeżeli oba czynniki są dane jako liczby oderwane, wtedy obojętną jest rzeczą, który z nich weźmiemy za mnożną, który za mnożnik; jeżeli jednak jeden z czynników jest dany bezpośrednio jako wielkość, wtedy dogodnie jest przyjmować go zawsze za mnożną.

Na załączonym rysunku mnożną jest odcinek p, mnożnikiem ułamek $^3/_4$.



142. Damy teraz kilka przykładów. Zanim wykonamy mnożenie tych czynników, których iloczyn będzie nowym licznikiem, jako też i tych czynników, których iloczyn będzie nowym mianownikiem, powinniśmy naprzód przekonać się, czy są jakiekolwiek czynniki wspólne w liczniku i mianowniku, a to w celu opuszczenia ich, przez co wypadek będzie uproszczony; patrz § 133.

Pomożyć a przez $\frac{b}{c}$.

$$a=\frac{a}{1};\quad \frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}.$$

Stąd widzimy, że $a\,.\,\frac{b}{c}$ i $\frac{ab}{c}$ są równoznaczne, tak np.

$$4\,.\,\frac{x}{5}=\frac{4x}{5};\ \text{i równie: } \frac{1}{4}(2x-3)=\frac{2x-3}{4}.$$

Pomnożyć: $\frac{x}{y}$ przez $\frac{x}{y}$.

$$\frac{x}{y}\times\frac{x}{y}=\frac{x\times x}{y\times y}=\frac{x^2}{y^2};$$

więc $\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}$.

Pomnożyć: $\frac{3a}{4b}$ przez $\frac{8c}{9a}$.

$$\frac{3a}{4b}\times\frac{8c}{9a}=\frac{3a\times 8c}{4b\times 9a}=\frac{2c\times 12a}{3b\times 12a}=\frac{2c}{3b}.$$

Pomnożyć: $\frac{3a^2}{(a+b)^2}$ przez $\frac{4(a^2-b^2)}{3ab}$.

$$\frac{3a^2}{(a+b)^2}\times\frac{4(a^2-b^2)}{3ab}=\frac{4a(a-b)\times 3a(a+b)}{b(a+b)\times 3a(a+b)}=\frac{4a(a-b)}{b(a+b)}.$$

Pomnożyć: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$ przez $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1$.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}+\frac{ab}{ab}=\frac{a^2+b^2+ab}{ab};$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}-\frac{ab}{ab}=\frac{a^2+b^2-ab}{ab};$$

$$\frac{a^2+b^2+ab}{ab}\times\frac{a^2+b^2-ab}{ab}=\frac{(a^2+b^2+ab)\,(a^2+b^2-ab)}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}{a^2b^2}=\frac{a^4+b^4+a^2b^2}{a^2b^2}.$$

Albo też możemy tak postąpić:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1;$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\,.\,\frac{a}{b}\,.\,\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}.$$

a przeto:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)=\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}-1=$$

$$=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1.$$

Oba te wypadki są jednakowe, gdyż:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1=\frac{a^4+b^4+a^2b^2}{a^2b^2}.$$

Pomnożyć: $\frac{1-a^2}{b+b^2}$ przez $\frac{1-b^2}{a+a^2}$ i przez $b+\frac{ab}{1-a}$.

Moglibyśmy pomnożyć przez siebie naprzód dwa pierwsze czynniki, a następnie iloczyn pomnożyć oddzielnie przez b

i przez $\frac{ab}{1-a}$ i te iloczyny dodać; lecz dogodniej jest zamienić *ilość mieszaną:* $b + \frac{ab}{1-a}$ na ułamek.

Tym sposobem:

$$b + \frac{ab}{1-a} = \frac{b(1-a)+ab}{1-a} = \frac{b}{1-a}.$$

Więc:

$$\frac{1-a^2}{b+b^2} \times \frac{1-b^2}{a+a^2} \times \frac{b}{1-a} = \frac{(1-a^2)(1-b^2)b}{b(1+b)\,a\,(1+a)(1-a)} = \frac{1-b}{a}.$$

PRZYKŁADY XVII.

Znaleść wartości następujących wyrażeń:

1. $\frac{2a}{3b} \times \frac{6bc}{5a^2}$. 2. $\frac{a^2}{bc} \times \frac{b^2}{ac} \times \frac{c^2}{ab}$.

3. $\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x+2}{x^2-1} \times \frac{x-1}{(x+2)^2}$.

4. $\left(a + \frac{ab}{a-b}\right)\left(b - \frac{ab}{a+b}\right)$.

5. $\left(\frac{a}{bc} - \frac{b}{ac} - \frac{c}{ab} - \frac{2}{a}\right) \times \left(1 - \frac{2c}{a+b+c}\right)$.

XVIII.

Dzielenie ułamków.

143. *Ilorazem dwóch ułamków nazywamy ułamek, którego licznikiem jest licznik dzielnej pomnożony przez mianownik dzielnika, a mianownikiem — mianownik dzielnej pomnożony przez licznik dzielnika.*

Określenie to można wyrazić za pomocą wzoru:

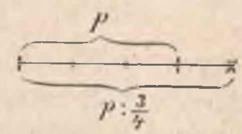
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

który przy $d = 1$ przedstawia znane nam już wypadki dzielenia przez liczbę całkowitą. Jeżeli ułamek $\frac{d}{c}$ nazwiemy *odwróconym* względem $\frac{c}{d}$, to możemy prawidło na dzielenie ułamków wyrazić w ten sposób: *należy dzielną pomnożyć przez odwrócony dzielnik.*

144. Podobnie jak w § 141 dla mnożnika, tak tutaj dla dzielnika ułamkowego łatwo dowieść następujące twierdzenie:

Jeżeli dzielnikiem jest ułamek, wtedy dla otrzymania ilorazu należy dzielną podzielić na tyle części równych, ile jedności zawiera licznik dzielnika, i części tych wziąć tyle, ile jedności zawiera mianownik dzielnika.

Rysunek załączony przedstawia rezultat z podzielenia odcinka p przez $\frac{3}{4}$.



145. Damy teraz kilka przykładów:

Podzielić: a przez $\frac{b}{c}$.

$$a = \frac{a}{1}; \quad \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

Podzielić $\frac{3a}{4b}$ przez $\frac{9a}{8c}$.

$$\frac{3a}{4b} : \frac{9a}{8c} = \frac{3a}{4b} \times \frac{8c}{9a} = \frac{2c \times 12a}{3b \times 12a} = \frac{2c}{3b}.$$

Podzielić: $\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}$ przez $\frac{b^2}{a^2-b^2}$.

$$\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}:\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}\times\frac{a^2-b^2}{b^2}=$$
$$=\frac{b(a-b)(a+b)(a-b)}{b^2(a+b)^2}=\frac{(a-b)^2}{b(a+b)}.$$

Wyrażenia ułamkowe złożone mogą być upraszczane przez zastosowanie prawideł poprzednio podanych, a odnoszących się do ułamków. Następne przykłady objaśnią użycie tych prawideł:

Uprościć: $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)$.

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2},$$
$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{4ab}{a^2-b^2},$$
$$\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}:\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}.$$

W tym przykładzie z czynnikami $a-b$ i $a+b$ *zostało wykonane mnożenie*, i iloczyn a^2-b^2 był użytym zamiast $(a+b)(a-b)$. W ogólności jednak korzystniej jest *nie wykonywać* mnożenia czynników w ciągu działania, może się bowiem przytrafić sposobność opuszczenia czynników wspólnych w liczniku i mianowniku. Mnożenie takie należy pozostawić na sam koniec w ostatecznym wypadku.

Uprościć: $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{3-a}}}$

$$1+\frac{a+1}{3-a}=\frac{3-a}{3-a}+\frac{a+1}{3-a}=\frac{3-a+a+1}{3-a}=\frac{4}{3-a},$$
$$1:\frac{4}{3-a}=\frac{1}{1}\times\frac{3-a}{4}=\frac{3-a}{4},$$

$$a+\frac{3-a}{4}=\frac{4a}{4}+\frac{3-a}{4}=\frac{3+3a}{4},$$
$$1:\frac{3+3a}{4}=\frac{1}{1}\times\frac{4}{3+3a}=\frac{4}{3+3a}.$$

PRZYKŁADY XVIII.

Podzielić:

1. $\dfrac{4a^2b}{5x^2y}$ przez $\dfrac{2ab^2}{15xy^2}$.

2. $\dfrac{3a^2b^3c^4}{4x^2y^3z^4}$ przez $\dfrac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^3z^2}$.

3. $\dfrac{1}{x^2-y^2}$ przez $\dfrac{1}{x-y}$.

4. $\dfrac{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3}{x^3+y^3}$ przez $\dfrac{(a+x)^2}{x^2-xy+y^2}$.

5. $\dfrac{a^2+b^2+2ab-c^2}{c^2-a^2-b^2+2ab}$ przez $\dfrac{a+b+c}{b+c-a}$.

6. $5x^2-\dfrac{1}{5}$ przez $x+\dfrac{1}{5}$.

7. $\dfrac{x^4}{a^4}-\dfrac{a^4}{x^4}$ przez $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}$.

8. $\dfrac{x^2}{a^2}+1+\dfrac{a^2}{x^2}$ przez $\dfrac{x}{a}-1+\dfrac{a}{x}$.

Uprościć następujące wyrażenia:

9. $\dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}$.

10. $\dfrac{x-a}{x-\dfrac{(x-b)(x-c)}{x+a}}$.

11. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

12. $\left(\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}\right):\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{x}{x^2-y^2}\right)$.

XIX.

Uogólnienia działań arytmetycznych.

146. W § § 141 i 144 oznaczaliśmy odcinek linii prostej za pomocą jednej głoski (p), zastrzegając przytem, że obojętnem jest, czy odcinek ten mierzy się całkowitą liczbą jednostek długości, czy ułamkową. Taki sposób oznaczania wielkości jest w praktyce bardzo dogodny, choćby z tego względu, że jest znacznie prostszy, aniżeli wyrażenie ułamkowe. Później, zwłaszcza w nauce o równaniach, przekonamy się o pożyteczności tego uogólnienia.

Odtąd więc głoski oznaczać będą zarówno wielkości całkowite jak i ułamkowe; gdyby w danym wypadku pewnej głosce należało nadać znaczenie wyłącznie liczby całkowitej, zrobimy o tem osobne zastrzeżenie.

Ponieważ przy rozwiązywaniu zadań sposobem algebraicznym okaże się potrzeba oznaczania za pomocą głosek wielkości, które dopiero znaleść mamy, a więc o których nie wiemy, czy okażą się dodatniemi czy ujemnemi, przeto *głoska będzie odtąd mogła oznaczać zarówno wielkość dodatnią jak ujemną, lub w przypadku szczególnym* 0. Nieraz jednak wypadnie czynić ograniczenia pod tym względem; nie każdy rodzaj wielkości może przyjmować wartości ujemne.

147. Nauczyliśmy się już czterech działań arytmetycznych nad ilościami ułamkowemi i ujemnemi, co daje nam możność uzupełnienia tabliczek, podanych na początku książki. Przedewszystkiem jednak opiszemy w sposób możliwie ścisły te uogólnienia działań arytmetycznych, które już poznaliśmy, oraz wprowadzimy niektóre nowe uogólnienia.

Dodawanie i odejmowanie liczb ujemnych i ułamkowych nie przedstawia żadnych trudności po tem, co się mówiło w rozdziałach poprzednich. Również łatwo jest wprowadzić

do rachunku liczbę 0. W tym celu damy następujące określenie tej liczby, zgodne z tem, co było powiedziane we wstępie, ale ściślejsze: *zerem nazywamy różnicę dwóch wielkości równych.* Wyraża się to następującym wzorem:

$$a - a = b - b = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Z tego wypada:

$$a + 0 = a + b - b = a \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$a - 0 = a - (b - b) = a - b + b = a \quad \ldots \quad (3)$$

$$0 + 0 = 0 - 0 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$+0 = -0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Liczby, jakie dotąd poznaliśmy, t. j. liczby dodatnie, ujemne, całkowite i ułamkowe oraz zero, nazywamy ogólnie *liczbami wymiernemi.* Jak to wyżej widzieliśmy, *działania dodawania i odejmowania można wykonywać nad wszystkiemi liczbami wymiernemi.*

148. Mnożenie określiliśmy we wstępie, zgodnie z tem, co wiemy z arytmetyki, jako szczególny przypadek dodawania, w którem wszystkie składniki są sobie równe. Składniki te są równe mnożnej, liczba składników — mnożnikowi. Ponieważ w § poprzednim rozszerzyliśmy już dodawanie na wszelkie liczby wymierne, więc można na tej zasadzie wykonywać mnożenie, o ile tylko mnożnik jest liczbą naturalną, bo taką tylko może być liczba składników. Pisząc mnożnik na pierwszem miejscu, mnożną na drugiem, otrzymamy:

$$a \,.\, (-b) = -ab \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$c \,.\, \frac{a}{b} = \frac{ca}{b} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$n \,.\, 0 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Wzory (1) i (2) znamy już z poprzednich rozdziałów, wzór (3) wypada z § 147 (4). Dla iloczynu, w którym mnożnik nie jest liczbą naturalną, określenie pierwotne mnożenia nie daje żadnego znaczenia. Iloczyn taki otrzyma jednak całkiem określoną wartość, jeżeli wprowadzimy następujące określenie uzupełniające: *wartość iloczynu pozostaje bez zmia-*

ny, jeżeli zastąpimy mnożnik przez mnożną a mnożną przez mnożnik, czyli, jeżeli p i q oznaczają jakiekolwiek liczby wymierne

$$pq = qp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Określenie to jest dopuszczalne, ponieważ zależność w niem wymieniona ma rzeczywiście miejsce w przypadku szczególnym, kiedy oba czynniki p i q są liczbami naturalnemi, a więc kiedy *oba iloczyny* pq *i* qp *można utworzyć niezależnie od siebie.*

W ten sposób dostaniemy:

$$(-b) \cdot a = -ab$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

$$0 \cdot n = 0.$$

Wzory te nie wyczerpują jeszcze wszystkich wypadków możliwych, wskutek czego okazała się potrzeba wprowadzenia jeszcze dwóch określeń

$$(-a)(-b) = ab \ (\S\ 61) \text{ i}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \ (\S\ 140),$$

które zresztą można zastąpić *żądaniem* ogólnem, *ażeby wzory* (1) *i* (2) *zachowały swoje znaczenie i w tym wypadku, kiedy litery w nich zawarte oznaczają jakiekolwiek liczby wymierne.* W rzeczy samej, jeżeli tak jest, to podstawiwszy we wzorze (1) $-a$ zamiast a, otrzymamy:

$$(-a)(-b) = -[(-a)b] = -(-ab) = ab \ (\S\ 49).$$

Podobnież, przyjmując we wzorze (2) $\frac{c}{d}$ zamiast c, dostaniemy:

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{d}a}{b} = \frac{\frac{ca}{d}}{b} = \frac{d\frac{ca}{d}}{bd} = \frac{ac}{bd} (\S\ 131).$$

Jeżeli wreszcie zażądamy, ażeby i wzór (3) był prawdziwym dla każdej liczby wymiernej, to otrzymamy rezultat,

że *jeżeli w iloczynie liczb wymiernych przynajmniej jeden z czynników jest zerem, to i wartość iloczynu jest równa* 0.

I odwrotnie: *jeżeli iloczyn jest równy* 0, *to przynajmniej jeden z czynników musi być także równy* 0. Bo w przeciwnym razie oba czynniki miałyby albo znaki jednakowe, albo różne; w pierwszym przypadku iloczyn byłby dodatni, w drugim ujemny, a więc w każdym razie różny od zera, co się sprzeciwia założeniu.

Uogólnienia wymienione w tym § pozwalają nam wykonywać działanie mnożenia nad wszelkiemi liczbami wymiernemi.

149. Jeżeli dwa iloczyny dwuczynnikowe, zawierające po jednym czynniku wspólnym różnym od zera, są sobie równe — to i pozostałe czynniki są także równe.

Twierdzenie to wyraża się za pomocą wzoru: jeżeli $ac = bc$, c różne od 0, to $a = b$.

Prawdziwość tego twierdzenia dla liczb dodatnich wypływa stąd, że jeżeli a jest większe od b, to i ac jest większe od bc; jeżeli zaś a mniejsze od b, to ac mniejsze od bc; może więc być tylko wtedy $ac = bc$, jeżeli $a = b$.

Jeżeli c jest ujemne, a dodatnie, to i b musi być dodatnie, gdyż inaczej ilość ujemna ac byłaby równa ilości dodatniej bc, co jest niemożliwe. Przyjmijmy $c = -c'$, gdzie c' jest dodatnie. Będzie:

$$ac = a \cdot (-c') = -ac'; \quad bc = -bc';$$

jeżeli $ac = bc$, to $-ac' = -bc'$, $ac' = bc'$ a więc, na zasadzie tego, cośmy poprzednio dowiedli, $a = b$.

Jeżeli c jest dodatnie, a ujemne, to i b musi być ujemne. Przyjmijmy $a = -a'$, $b = -b'$, będzie $ac = -a'c$, $bc = -b'c$; jeżeli $ac = bc$, to $-a'c = -b'c$, $a'c = b'c$, a zatem $a' = b'$, więc też i $a = b$.

Jeżeli wreszcie c jest ujemne, a ujemne, to i b musi być ujemne: $ac = (-a')(-c') = a'c'$; $bc = b'c'$;
jeżeli $ac = bc$, to $a'c' = b'c'$, $a' = b'$, a więc $a = b$.

Gdyby jednak było $c=0$, to zawsze będzie $ac = bc = 0$, jakiekolwiek wartości przyjęlibyśmy dla a i b [§ 148 (3)].

150. Dzielenie określiliśmy pierwotnie jako rozkład na składniki równe. Określenie to możnaby było stopniowo uogólniać, podobnie jak to zrobiliśmy przy mnożeniu. Prędzej jednak dojdziemy do celu za pomocą następującego określenia, zawierającego pierwotne jako przypadek szczególny: *Podzielić liczbę A przez B znaczy znaleść taką liczbę, która pomnożona przez B daje A.*

Jeżeli więc $A : B = C$, to $BC = A$.

Zastanówmy się, czy zawsze można znaleść żądaną liczbę C.

Jeżeli B nie jest zerem ale jakąkolwiek inną liczbą wymierną, wtedy istnieje tylko jedna liczba C, czyniąca zadość temu warunkowi. Bo gdyby było $A : B = D$, to

$$BD = A = BC,$$

a więc na zasadzie § poprzedzającego $D = C$. Gdyby jednak było $B = 0$, to i $BC = 0$, jakąkolwiek wartość przyjęlibyśmy dla C, a więc niema takiej liczby C, która pomnożona przez 0 dałaby A. *Dzielenie przez* 0 *jest niemożliwe*, ponieważ jest w sprzeczności z wzorem (3) § 148.

W szczególnym wypadku, jeżeli i $A = 0$, każda liczba C czyni zadość warunkowi

$$0 \,.\, C = 0;$$

dzielenie 0 przez zero nie jest więc sprzeczne z naszemi wiadomościami dotychczasowemi, ale też nie prowadzi do określonego rezultatu. Pozatem A i B żadnym ograniczeniom nie podlegają, mogą więc być jakiemikolwiek liczbami wymiernemi.

Wypada z tego, że *dzielenie jest zawsze możliwe i daje iloraz oznaczony, o ile tylko dzielnik jest różny od zera.*

Jak znaleść iloraz w każdym przypadku poszczególnym, wiemy już z rozdziałów IX i XVIII.

151. Łącząc to, cośmy dotychczas mówili w tym rozdziale, możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie.

Cztery działania arytmetyczne, t. j. dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, z wyjątkiem dzielenia przez 0, *można wykonywać nad wszelkiemi liczbami wymiernemi, i rezultatem działania lub szeregu działań jest pewna oznaczona liczba wymierna.*

Ponieważ jednak odejmowanie można zastąpić przez dodawanie tejże samej ilości wziętej ze znakiem przeciwnym, a dzielenie przez mnożenie przez wielkość odwrotną, przeto cztery działania arytmetyczne można w algebrze sprowadzić do dwóch: dodawania i mnożenia.

152. Określenie ułamka jakie było podane w § 127 wymaga, ażeby zarówno licznik jak i mianownik były liczbami naturalnemi. Okazało się jednak dogodnem, każde dzielenie algebraiczne przedstawiać pod postacią ułamka. W tym celu trzeba ułamkowi nadać odpowiednie znaczenie we wszystkich wypadkach, kiedy licznik i mianownik są liczbami, mogącemi być dzielną i dzielnikiem. Musimy więc znaleść odpowiednią wartość dla każdego ułamka, w którym licznik jest jakąkolwiek liczbą wymierną, zaś mianownik jakąkolwiek liczbą wymierną różną od zera.

Ażeby to osiągnąć, przyjmujemy:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \text{ zgodnie z § 68} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{0}{b} = 0 \text{ zgodnie z § 148 (3)} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{pa}{pb} = \frac{a}{b} \text{ zgodnie z § 131} \quad \ldots \quad (3)$$

z tem uogólnieniem, że a może przyjąć wartość jakąkolwiek, zaś b i p jakiekolwiek wartości różne od zera. Wzór (3) jest więc ważny i przy $p = -1$; na tej zasadzie otrzymamy znaczenie ułamka z mianownikiem ujemnym:

$$\frac{a}{-b} = \frac{(-1)\,a}{(-1)\,(-b)} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}\;.\;\;.\;\;.\;\;(4)$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{(-1)\,(-a)}{(-1)\,(-b)} = \frac{a}{b}\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(5)$$

Jeżeli wreszcie licznik i mianownik są ułamkami $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, to przyjmując $p = bd$, będzie:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{bd\,.\,\frac{a}{b}}{bd\,.\,\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

zgodnie z § 143.

Wyczerpaliśmy tu wszelkie możliwe przypadki ułamków, gdyż ułamek z mianownikiem 0, jako nieodpowiadający żadnemu przypadkowi dzielenia, nie ma żadnego znaczenia

Określenia mnożenia i dzielenia ułamków, podane w §§ 140 i 143 rozciągamy na tak uogólnione ułamki.

Każdy ułamek można przedstawić pod postacią ułamka, którego licznik i mianownik są liczbami naturalnemi.

153. Widzieliśmy w § 58, że jeżeli a, b, c są liczbami naturalnemi, to

$$c\,(a + b) = ac + bc\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(1).$$

Jest to własność zasadnicza mnożenia, na zasadzie której można mnożyć wielomiany. Przekonamy się teraz, że przy uogólnieniach mnożenia, jakie w tym rozdziale wprowadziliśmy, własność ta jest także zachowana. Widzimy to odrazu, jeżeli samo tylko c nie jest liczbą naturalną. Rzeczywiście powtórzyć $(a + b)$ razy liczbę c jest to to samo, co dodać c naprzód a razy, potem b razy. Również nie sprawia żadnych trudności ten wypadek, w którym dane liczby są ujemne.

Przypuśćmy jednak, że a, b, c są ułamkami, przekonamy się, że i w tym wypadku wzór (1) jest prawdziwym, tworząc oba wyrażenia tego wzoru niezależnie jedno od drugiego.

Niech będzie $a = \frac{a_1}{a_2}$, $b = \frac{b_1}{b_2}$; wtedy

$$c\,(a + b) = c\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2}\right) = c\,\frac{a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2 b_2} = \frac{c\,(a_1 b_2 + b_1 a_2)}{a_2 b_2}.$$

W liczniku ostatniego ułamka w nawiasie jest suma dwóch liczb naturalnych, ułamek ten jest więc równy

$$\frac{a_1 b_2 c + a_2 b_1 c}{a_2 b_2}.$$

Podobnie znajdziemy:

$$ac + bc = \frac{a_1}{a_2}.c + \frac{b_1}{b_2}.c = \frac{a_1 c}{a_2} + \frac{b_1 c}{b_2} = \frac{a_1 b_2 c + a_2 b_1 c}{a_2 b_2}.$$

Oba wyrażenia są więc i w tym wypadku równe.

154. Działania nad ułamkami, w których licznik i mianownik nie są liczbami naturalnemi, objaśnimy za pomocą dwóch następujących przykładów:

Uprościć:

$$\frac{a}{(a - b)\,(a - c)} + \frac{b}{(b - c)\,(b - a)} + \frac{c}{(c - a)\,(c - b)}.$$

Drugi ułamek zawiera czynnik $b - a$ w mianowniku; czynnik ten różni się od czynnika $a - b$, znajdującego się w mianowniku ułamka pierwszego, tylko znakiem każdego wyrazu; na zasadzie zaś § 152 (4) mamy:

$$\frac{b}{(b - c)\,(b - a)} = -\frac{b}{(b - c)\,(a - b)}.$$

Również i mianownik trzeciego ułamka może być przedstawiony pod postacią, która jest dogodniejszą dla nas, gdyż na zasadzie prawidła znaków mamy:

$$(c - a)\,(c - b) = (a - c)\,(b - c).$$

Tym sposobem dane wyrażenie może być przedstawione pod postacią:

$$\frac{a}{(a - b)\,(a - c)} - \frac{b}{(b - c)\,(a - b)} + \frac{c}{(a - c)\,(b - c)};$$

i pod tą postacią widzimy odrazu, że n. W. W. względem mianowników jest: $(a-b)(a-c)(b-c)$.

Sprowadzając ułamki do najmniejszego wspólnego mianownika, zamienimy dane wyrażenie na następujące:

$$\frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)},$$

to jest: $\dfrac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}$, czyli 0.

Uprościć:

$$\frac{-1}{ax}\cdot\frac{a}{-\frac{1}{x^2}}+\frac{-x}{1+\frac{a^2}{-x^2}}.$$

Pierwsze wyrażenie można tak przekształcić:

$$\left(-\frac{1}{ax}\right)\left(-\frac{a}{\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{ax}\cdot\frac{a}{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{ax}\cdot ax^2=\frac{ax^2}{ax}=x.$$

Drugie wyrażenie:

$$\frac{-x}{1+\frac{a^2}{-x^2}}=-\frac{x}{1-\frac{a^2}{x^2}}=-\frac{x}{\frac{x^2-a^2}{x^2}}=-\frac{x^3}{x^2-a^2}=$$

$$=\frac{x^3}{a^2-x^2};$$

a zatem ich suma będzie:

$$x+\frac{x^3}{a^2-x^2}=\frac{a^2x-x^3+x^3}{a^2-x^2}=\frac{a^2x}{a^2-x^2}.$$

155. Urządzenie tabliczek czterech działań arytmetycznych nad liczbami całkowitemi (ujemnemi i dodatniemi), podanych na początku książki, jest tak proste, że objaśnień bliższych nie wymaga. Uczący się powinien sam podobne tablice wykonać. Najlepiej nadaje się do tego, jak i wogóle do rysunków pomocniczych przy nauce algebry, papier mili-

metrowy. Jest to papier pokryty dwoma układami linii równoległych, poprowadzonych w odległości 1 mm jedna od drugiej; linie jednego układu są prostopadłe do linii drugiego. Każda dziesiąta linia wyróżnia się większą grubością.

Przyglądając się uważnie, możemy wykryć cały szereg praw, według których liczby są rozłożone na tych tabliczkach, np.:

I. Linie, wzdłuż których leżą liczby 0, odgraniczają zawsze liczby dodatnie od ujemnych

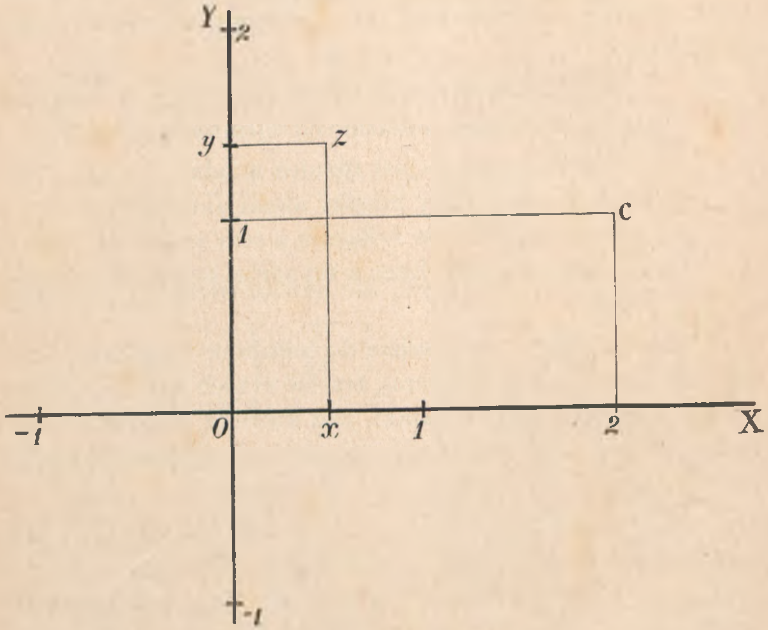
II. Im większa jest różnica między dwiema liczbami, tem więcej leży między niemi linii, łączących liczby równe; w tabliczce dzielenia z tem zastrzeżeniem, że obie liczby powinny leżeć z tej samej strony linii wolnej od liczb.

156. Ażeby wprowadzić do tabliczek rezultaty działań nad liczbami ułamkowemi, trzeba w nich rozsunąć liczby dotychczas znalezione i ułamki, nad któremi działania mają być wykonywane, umieszczać stosownie do ich wielkości, pomiędzy odpowiedniemi liczbami całkowitemi.

W tym celu poprowadźmy dwie linie proste OX i OY przecinające się w punkcie 0 pod kątem prostym. Wzdłuż tych prostych wypisujemy liczby całkowite, pozostawiając między niemi odległości równe dowolnie obranej jednostce długości.

Jeżeli teraz chcemy zanotować rezultat jednego z działań arytmetycznych nad któremikolwiek dwiema liczbami, np. 1 i 2, to prowadzimy z punktu 1 na prostej OY linię prostopadłą do OY i z punktu 2 na OX linię prostopadłą do OX; przy punkcie przecięcia tych dwóch linii zapisujemy otrzymany rezultat działania, który na rysunku jest oznaczony literą c. Będzie więc w razie dodawania $c=1+2=3$, w razie odejmowania $c=1-2=-1$ i t. d. Postępowanie to jest zupełnie podobne jak przy układaniu tabliczek.

W takiż sam sposób możemy zanotować rezultat działania nad jakiemikolwiek liczbami x, y, bez względu na to, czy one są całkowite czy ułamkowe. Z punktu leżącego na OY w odległości y od O wyprowadzamy prostopadłą do OY,



z punktu leżącego na OX w odległości x od O prostopadłą do OX, i obok punktu przecięcia tych prostych piszemy rezultat działania z.

Jeżeli działaniem, jakie wykonać mamy, jest dodawanie, będzie $z = x + y$, a ponieważ na załączonym rysunku $x = \frac{1}{2}$, $y = 1\frac{2}{5}$, więc $z = 1\frac{9}{10}$; jeżeli wykonywamy dzielenie, to $z = \frac{y}{x} = 2\frac{4}{5}$, i t. d.

PRZYKŁADY XIX.

Znaleść wartości następujących wyrażeń:

1. $\frac{a - x}{b - x}$, gdy $x = \frac{ab}{a + b}$.
2. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b - a} - \frac{a}{a + b}$, gdy $x = \frac{a^2(b - a)}{b(b + a)}$.
3. $\frac{a^2x + b^2y}{x + y}$, gdy $a = \frac{2}{3}$ i $b = \frac{2}{3}$.
4. $\frac{x}{x + y} + \frac{y}{x - y} - \frac{y^2}{x^2 - y^2}$, gdy $y = \frac{3x}{4}$.
5. $\frac{x + y - 1}{x - y + 1}$, gdy $x = \frac{a + 1}{ab + 1}$ i $y = \frac{ab + a}{ab + 1}$.

XX.

Równania stopnia pierwszego.

157. Gdy dwa wyrażenia algebraiczne są połączone znakiem równości, wtedy całość taka nazywa się *równością*. Wyrażenia same, w ten sposób połączone nazywają się *stronami* równości. Wyrażenie, znajdujące się z lewej strony znaku równości, nazywa się *pierwszą*, wyrażenie zaś będące na prawej stronie znaku równości, nazywa się *drugą* stroną równości.

158. *Równość* nazywa się *tożsamościową*, lub krócej *tożsamością*, gdy obie jej strony są równe, jakiekolwiekby wartości liczebne miały głoski, które do niej wchodzą. Tak np. następujące równości są tożsamościami:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2,$$
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3;$$

to jest: twierdzenia powyższe algebraiczne mają zawsze miejsce przy wszystkich znaczeniach głosek x i a. Czytelnik powinien zwrócić uwagę na to, że prawie wszystkie równości, z jakiemi miał dotąd do czynienia, były wyłącznie tego właśnie rodzaju, to jest były tożsamościami.

159. *Równością warunkową* lub krócej *równaniem* nazywa się taka równość, która ma miejsce nie przy wszystkich znaczeniach na głoski do niej wchodzące, ale tylko wtedy, gdy też głoski przedstawiają pewną szczególną liczbę, lub pewne szczególne liczby. Naprzykład: równość $x + 1 = 7$ jest prawdziwą tylko wtedy, gdy $x = 6$.

160. Ta głoska, na miejsce której ma być podstawiona pewna szczególna wartość, lub pewne szczególne wartości, aby równość miała istotnie miejsce, nazywa się *ilością nieznaną* lub *niewiadomą*. Mówimy, że ta wartość, która podstawiona w miejsce niewiadomej, czyni w samej rzeczy pierwszą stronę równania równą drugiej, *zadosyć czyni równaniu*. Sama zaś ta wartość nazywa się *pierwiastkiem równania*. *Rozwiązać równanie*, jest to znaleść jego pierwiastek lub pierwiastki.

161. Równanie, zawierające jednę niewiadomą, nazywa się równaniem takiego stopnia, jaki jest najwyższy wykładnik przy niewiadomej. I tak, jeżeli x oznacza niewiadomą, równanie nazywa się równaniem *stopnia pierwszego*, gdy x wchodzi tylko w potędze *pierwszej*. Jeżeli wchodzi do równania x^2, i wyższej potęgi nad tę niema w równaniu, wtedy równanie nazywa się równaniem stopnia *drugiego* lub *kwadratowem*. Jeżeli wchodzi do równania x^3, bez żadnej wyższej potęgi, wtedy nazywa się ono równaniem stopnia *trzeciego*, lub *sześciennem* i t. d.

Należy tu zauważyć, że w powyższych określeniach przypuszcza się, że obie strony równania są *wyrażeniami całkowitemi względem* x, to znaczy, że mianowniki ułamków, występujących w równaniu, nie zawierają głoski x.

162. W tym rozdziale pokażemy w jaki sposób rozwiązują się równania stopnia pierwszego. Zaczniemy naprzód od wykazania pewnych działań, które mogą być wykonane nad równaniem, bez nadwerężenia tej równości jaką ono wyraża.

163. *Jeżeli obie strony równania będą pomnożone przez jedną i tęż samą ilość, wtedy wypadki stąd otrzymane będą równe.*

Wypada to z widocznej samo przez się zasady, że jeżeli równe ilości będą pomnożone przez jednę i tęż samą ilość, wtedy otrzymane iloczyny będą równe; użycie tej zasady zaraz wykażemy.

Podobnież: *jeżeli obie strony równania będą podzielone przez jednę i tęż samę liczbę, wtedy otrzymane ilorazy będą równe.*

164. Zasada wyrażona w § 163 główne znajduje zastosowanie przy *znoszeniu mianowników w równaniu*. W tym celu należy pomnożyć wszystkie wyrazy obu stron równania przez iloczyn wszystkich mianowników, znajdujących się w równaniu, albo też przez najmniejszą wspólną wielokrotną tychże mianowników. Naprzykład: przypuśćmy, że mamy równanie:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 9.$$

Pomnóżmy każdy wyraz przez $3 \times 4 \times 6$; otrzymamy:

$$4 \times 6 \times x + 3 \times 6 \times x + 3 \times 4 \times x = 9 \times 3 \times 4 \times 6,$$

to jest: $$24x + 18x + 12x = 648;$$

podzielmy wszystkie wyrazy przez 6, otrzymamy:

$$4x + 3x + 2x = 108.$$

Zamiast mnożyć wszystkie wyrazy przez $3 \times 4 \times 6$, możemy je pomnożyć przez 12, które jest n. W. W. względem mianowników 3, 4 i 6. Tym sposobem otrzymalibyśmy odrazu:

$$4x + 3x + 2x = 108;$$

stąd: $$9x = 108;$$

a dzieląc obie strony przez 9, będzie:

$$x = \frac{108}{9} = 12.$$

12 więc jest *pierwiastkiem* danego równania. Możemy to sprawdzić podstawiając 12 zamiast x w to początkowe równanie. Pierwsza strona stanie się:

$\frac{12}{3} + \frac{12}{4} + \frac{12}{6}$, to jest $4 + 3 + 2$ czyli 9, a to jest zgodne z drugą stroną.

165. *Każdy wyraz w równaniu może być przeniesiony z jednej strony równania na drugą, ale ze zmienionym znakiem.*

Przypuśćmy np., że:

$$x - a = b - y.$$

Dodajmy do obu stron równania po a, otrzymamy:

$$x - a + a = b - y + a,$$

to jest: $$x = b - y + a.$$

Odejmijmy po b od każdej strony, będzie:

$$x - b = b + a - y - b = a - y.$$

Widzimy stąd, że najprzód $-a$ znikło na pierwszej stronie równania, a wystąpiło jako $+a$ na drugiej stronie; i dalej, że $+b$ znikło na jednej stronie, a wystąpiło jako $-b$ na drugiej stronie równania. [1])

[1]) Ściśle mówiąc, zasady wyrażone w tekscie, w §§ 163 i 165, nie są widocznemi same przez się; — jakkolwiek bowiem jest widoczną prawdą, że do ilości równych można dodać równe i sumy, stąd wypadną równe, i t. d., z tem wszystkiem *rozumowanie* dopiero pokazuje nam, że przez wprowadzenie w postaci równania takich zmian, o jakich w tych dwóch §§ mowa, związek pomiędzy ilościami niewiadomemi i wiadomemi pozostaje bez zmiany.

166. *Można zmienić znaki we wszystkich wyrazach równania na przeciwne, i równanie się nie zmieni.*

Zasada, na której polega przenoszenie wyrazów może być tak wyrażoną:

Jeżeli do obu stron równania dodamy ilości równe, lub od obu stron równania odejmiemy ilości równe, równanie nie zmieni się, to jest jego pierwiastki pozostaną też same.

W rzeczy samej: oznaczmy przez A i B dwie strony pewnego równania, które tym sposobem będzie takie:

$$A = B \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Przypuśćmy nadto, że równanie zawiera tylko jednę niewiadomą x. Dodajmy do obu stron po tej samej ilości m; będzie:

$$A + m = B + m \quad . \quad . \quad (2).$$

Oczywistą jest rzeczą, że jeżeli pewna wartość $x = a$, zadosyć czyni równaniu (1), to taż sama wartość czyni zadosyć i równaniu drugiemu, gdyż do ilości A i B, które, podług przypuszczenia, są równe przy $x = a$, dodana jest jedna i taż sama ilość m. Odwrotnie, jeżeli równaniu (2) zadosyć czyni pewna wartość $x = b$, to znaczy się, że przy tej wartości na x, $A + m$ jest równe $B + m$. Odejmując wtedy od tych ilości równych jedną i tęż samą ilość m, otrzymamy reszty równe, t. j. będzie i $A = B$ przy $x = b$. Każdy więc pierwiastek równania $A = B$ jest zarazem pierwiastkiem równania $A + m = B + m$; i odwrotnie.

Jest to zasada, na której polega przenoszenie wyrazów z jednej strony równania na drugą.

Drugą zasadę możemy w ten sposób wypowiedzieć:

Jeżeli obie strony równania pomnożymy, lub podzielimy, przez jednę i tęż samę ilość, nie zawierającą niewiadomej, wtedy równanie pozostanie bez zmiany.

Wystawmy sobie, że wszystkie wyrazy w równaniu są przeniesione na stronę pierwszą, tak, że równanie jest sprowadzone do postaci:

$$A = 0.$$

Pierwiastkiem równania będzie więc ta wartość na x, która czyni A równem 0. Przypuśćmy, że taką wartością będzie $x = a$.

Pomnóżmy obie strony równania przez pewną ilość m; otrzymamy równanie:

$$mA = 0,$$

Wypada to z § 165 przez przeniesienie wszystkich wyrazów. Tak naprzykład, w równaniu:

$$x - a = b - y,$$

przenosząc wszystkie wyrazy z pierwszej na drugą i z drugiej na pierwszą stronę, będzie:

$$y - b = a - x,$$

czyli: $$a - x = y - b;$$

do tegoż samego wypadku dochodzimy, zmieniając znaki na przeciwne we wszystkich wyrazach początkowego równania. Tenże sam rezultat otrzymamy, mnożąc obie strony równania przez — 1.

167. Możemy teraz podać prawidło na rozwiązywanie jakiegokolwiek równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą:

---

którego pierwiastki będą też same, co i pierwiastki równania $A = 0$. W rzeczy samej: przy każdej wartości $x = a$ zadosyć czyniącej danemu równaniu, czynnik A jest równy zero, więc i mA będzie także zerem. A zatem każdy pierwiastek równania $A = 0$ będzie zarazem i pierwiastkiem równania $mA = 0$. I odwrotnie: każda wartość na x, zadosyć czyniąca równaniu $mA = 0$, powinna jeden z czynników m lub A czynić równym zero (§ 148). Lecz jeżeli m nie zawiera x, wtedy stać się zerem nie może: przeto drugi czynnik A powinien być równym zero; czyli że pierwiastki równania $mA = 0$, są zarazem i pierwiastkami równania $A = 0$. Rozumowanie to jednak nie stosuje się do tego przypadku, gdy czynnik m zawiera x; może się bowiem wtedy przytrafić, że równaniu $mA = 0$ wskutek tego zadosyć się czyni, że czynnik m staje się zerem, że zatem przy tej wartości na x, A nie jest koniecznie równem zero. Np. gdybyśmy obie strony równania $A = 0$ pomnożyli przez $x - 5$, otrzymalibyśmy:

$$(x - 5)\, A = 0$$

To równanie sprawdza się wartością $x = 5$; a jednak $x = 5$ może nie być pierwiastkiem równania $A = 0$.

Rozumowanie to jest wszakże dla początkującego zbyt trudnem, i dla tego, przy pierwszem uczeniu się o równaniach, należy wyłącznie trzymać się tekstu, odkładając cały ten rozbiór przynajmniej do czasu nauki o równaniach stopnia drugiego.

Należy naprzód znieść mianowniki, jeżeli to jest potrzebnem; następnie przenieść wszystkie wyrazy zawierające niewiadomą na jednę stronę równania, a wszystkie wyrazy wiadome na drugą, poczem należy podzielić obie strony równania przez współczynnik, lub przez sumę współczynników przy ilości niewiadowej, i tym sposobem otrzymamy szukany pierwiastek.

168. Podajemy teraz na zastosowanie powyższych prawideł przykłady.

Rozwiązać:

$$7x + 25 = 35 + 5x.$$

W równaniu tem niema wcale ułamków; przez przeniesienie wyrazów mamy:

$$7x - 5x = 35 - 25,$$

to jest: $$2x = 10;$$

dzielimy obie strony przez 2; otrzymamy:

$$x = \frac{10}{2} = 5.$$

Dla sprawdzenia należy podstawić 5 zamiast x w początkowe równanie; wtedy znajdziemy, że każda strona równania jest równą 60.

169. Rozwiązać:

$$4(3x - 2) - 2(4x - 3) - 3(4 - x) = 0.$$

Należy naprzód wykonać wskazane mnożenia; wtedy otrzymamy:

$$12x - 8 - (8x - 6) - (12 - 3x) = 0.$$

Znosząc nawiasy, będzie:

$$12x - 8 - 8x + 6 - 12 + 3x = 0;$$

łącząc wyrazy podobne:

$$7x - 14 = 0;$$

przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę:

$$7x = 14;$$

dzieląc obie strony równania przez 7, otrzymamy:

$$x = \frac{14}{7} = 2.$$

Czytelnik powinien zawsze sprawdzić otrzymane wypadki. W powyższym przykładzie podstawiając 2 zamiast x w równanie początkowe, znajdziemy: 16 — 10 — 6, to jest 0, jak być powinno.

170. Rozwiązać:

$$\frac{5x+4}{2} - \frac{7x+5}{10} = 5\frac{3}{5} - \frac{x-1}{2}.$$

$5\frac{3}{5} = \frac{28}{5}$; najmniejsza wspólna wielokrotna względem mianowników jest 10; mnożąc całe równanie przez 10, będzie:

$$5(5x+4) - (7x+5) = 28 \times 2 - 5(x-1);$$

to jest: $25x + 20 - 7x - 5 = 56 - 5x + 5,$

przenosząc: $25x - 7x + 5x = 56 + 5 - 20 + 5,$

to jest: $23x = 46;$

skąd: $x = \frac{46}{23} = 2.$

Uczący się powinien z początku wykonywać całkowitą robotę w zupełności tak, jak to jest pokazane w obecnym przykładzie, nie używając uproszczeń. Bardzo często bywają popełniane omyłki w znakach, przy znoszeniu mianowników. W powyższem równaniu ułamek $-\frac{7x+5}{10}$ ma być pomnożonym przez 10; radzimy wypadek otrzymany przedstawić naprzód pod postacią $-(7x+5)$, a następnie pod postacią $-7x-5$ w tym celu, aby zwrócić należytą uwagę na znaki.

171. Rozwiązać:

$$\frac{1}{3}(5x+3) - \frac{1}{7}(16-5x) = 37 - 4x.$$

Na zasadzie § 149, powyższe równanie może być tak napisane:

$$\frac{5x+3}{3} - \frac{16-5x}{7} = 37 - 4x.$$

Pomnóżmy przez 21, będzie:

$$7(5x+3) - 3(16-5x) = 21(37-4x),$$

to jest: $35x + 21 - 48 + 15x = 777 - 84x;$

przez przeniesienie, otrzymamy:

$$35x + 15x + 84x = 777 - 21 + 48;$$

to jest: $134x = 804;$

skąd: $x = \frac{804}{134} = 6.$

172. Rozwiązać równanie:

$$\frac{6x+15}{11} - \frac{8x-10}{7} = \frac{4x-7}{5}.$$

Należy naprzód pomnożyć obie strony równania przez iloczyn z 11, 7 i 5; tym sposobem będzie:

$$35(6x+15) - 55(8x-10) = 77(4x-7),$$

to jest:

$$210x + 525 - 440x + 550 = 308x - 539;$$

przez przeniesienie wyrazów:

$$210x - 440x - 308x = -539 - 525 - 550.$$

Zmieniając wszystkie znaki na przeciwne:

$$440x + 308x - 210x = +539 + 525 + 550,$$

to jest: $538x = 1614,$

skąd: $x = \frac{1614}{538} = 3.$

PRZYKŁADY XX.

1. $5x + 50 = 4x + 56;$ 2. $16x - 11 = 7x + 70.$
3. $7(x-18) = 3(x-14);$ 4. $16x = 38 - 3(4-x).$
5. $72(x-5) = 63(5-x).$
6. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11.$ 7. $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{6} = \frac{x}{8} + \frac{1}{12}.$

8. $\frac{x}{6} - 4 = 24 - \frac{x}{8}$.   9. $\frac{2x}{3} = \frac{176 - 4x}{5}$.

10. $\frac{7x}{8} - 5 = \frac{9x}{10} - 8$.   11. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2$.

12. $4(x - 3) - 7(x - 4) = 6 - x$.

13. $\frac{x}{3} - \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{5} - \frac{1}{5} - \frac{x}{6} + \frac{1}{6}$.

14. $1 + \frac{x}{2} - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} - 4\frac{1}{2}$.

15. $x - 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} = 0$.

16. $\frac{x+3}{2} + \frac{x+4}{3} + \frac{x+5}{4} = 16$.

17. $\frac{2x-5}{6} + \frac{6x+3}{4} = 5x - 17\frac{1}{2}$.

18. $\frac{x}{4} - \frac{5x+8}{6} = \frac{2x-9}{3}$.

19. $\frac{3x+5}{7} - \frac{2x+7}{3} + 10 - \frac{3x}{5} = 0$.

20. $\frac{1}{2}(27 - 2x) = \frac{9}{2} - \frac{1}{10}(7x - 54)$.

21. $5x - [8x - 3\{16 - 6x - (4 - 5x)\}] = 6$.

22. $\frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} = \frac{7x}{3} - \frac{11}{6}(x+3)$.

23. $\frac{2-x}{3} + \frac{3-x}{4} + \frac{4-x}{5} + \frac{5-x}{6} + \frac{3}{4} = 0$.

XXI.

Równania stopnia pierwszego (ciąg dalszy).

173. Podamy teraz niektóre przykłady rozwiązywania równań stopnia pierwszego, cokolwiek trudniejsze, aniżeli zadania poprzedniego rozdziału. Czytelnik przekona się, że

niekiedy korzystną jest rzeczą uwalniać równanie od mianowników tylko w części, i następnie zrobić pewne uproszczenia, zanim przystąpimy do zniesienia pozostałych mianowników.

174. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x+6}{11} - \frac{2x-18}{3} + \frac{2x+3}{4} = 5\frac{1}{3} + \frac{3x+4}{12}.$$

Pomnóżmy naprzód obie strony równania przez 12; będzie:

$$\frac{12(x+6)}{11} - 4(2x - 18) + 3(2x + 3) = \frac{16}{3} \times 12 + 3x + 4$$

czyli:

$$\frac{12(x+6)}{11} - 8x + 72 + 6x + 9 = 64 + 3x + 4.$$

Przez stosowne przeniesienie wyrazów na drugą stronę i połączenie wyrazów podobnych, otrzymamy:

$$\frac{12(x+6)}{11} = 5x - 13.$$

Mnożąc obie strony przez 11, wypadnie:

$$12(x + 6) = 11(5x - 13),$$

czyli: $12x + 72 = 55x - 143;$

skąd, przez przeniesienie:

$$72 + 143 = 55x - 12x,$$

to jest: $43x = 215,$

skąd nakoniec:

$$x = \frac{215}{43} = 5.$$

175. Rozwiązać równanie:

$$\frac{6x - 13\frac{1}{3}}{15 - 2x} + 2x + \frac{16x - 15}{24} = 6\frac{5}{12} - \frac{20\frac{5}{8} - 8x}{3}.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez 24, będzie:

$$\frac{24\left(6x-\frac{40}{3}\right)}{15-2x}+48x+16x-15=24\times\frac{77}{12}-8\left(\frac{165}{8}-8x\right);$$

czyli:

$$\frac{144x-320}{15-2x}+48x+16x-15=154-165+64x.$$

Przez przeniesienie wszystkich wyrazów całkowitych z pierwszej strony równania na drugą, i następnie uproszczenie:

$$\frac{144x-320}{15-2x}=4.$$

Mnożąc teraz przez $15-2x$ obie strony, wypadnie:

$$144x-320=4(15-2x)=60-8x,$$

przeto: $$144x+8x=320+60,$$

czyli: $$152x=380,$$

skąd: $$x=\frac{380}{152}=2\frac{76}{152}=2\frac{1}{2}.$$

176. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x-5}{x-7}=\frac{x+3}{x+9}.$$

Pomnóżmy obie strony tego równania przez

$$(x-7)(x+9),$$

będzie: $$(x+9)(x-5)=(x-7)(x+3),$$

to jest: $$x^2+4x-45=x^2-4x-21;$$

odejmijmy po x^2 od każdej strony równania:

$$4x-45=-4x-21;$$

przenieśmy wyrazy niewiadome na pierwszą, wiadome na drugą stronę równania, otrzymamy:

$$4x+4x=45-21$$

czyli: $$8x=24;$$

skąd: $$x=\frac{24}{8}=3.$$

W tym przykładzie, po zniesieniu mianowników, x^2 znalazło się na *obu stronach* równania; przez odejmowanie można było uwolnić się od niego i otrzymać tym sposobem równanie *stopnia pierwszego*.

177. Rozwiązać równanie:

$$\frac{2x+3}{x+1}=\frac{4x+5}{4x+4}+\frac{3x+3}{3x+1}.$$

Tutaj najprzód pomnożymy obie strony równania przez $4x+4$, to jest przez $4(x+1)$, będzie:

$$4(2x+3)=4x+5+\frac{4(x+1)3(x+1)}{3x+1};$$

przeto: $$8x+12-4x-5=\frac{12(x+1)^2}{3x+1};$$

czyli: $$4x+7=\frac{12(x+1)^2}{3x+1}.$$

Pomnóżmy teraz przez $3x+1$; otrzymamy:

$$(3x+1)(4x+7)=12(x+1)^2$$

czyli: $$12x^2+25x+7=12x^2+24x+12.$$

Odejmując po $12x^2$ od każdej strony równania i przenosząc wyrazy niewiadome na pierwszą, a wiadome na drugą stronę, wypadnie:

$$25x-24x=12-7,$$

to jest: $$x=5.$$

178. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}.$$

Mamy naprzód:

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{(x-1)(x-3)-(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\frac{x^2-4x+3-(x^2-4x+4)}{(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$

Dalej:

$$\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{(x-4)(x-6)-(x-5)^2}{(x-5)(x-6)}=$$

$$=-\frac{1}{(x-5)(x-6)}.$$

Więc równanie dane zamieni się na takie:

$$-\frac{1}{(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{(x-5)(x-6)}.$$

Zmieniając znaki na przeciwne, otrzymamy:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{(x-5)(x-6)};$$

znosząc zaś mianowniki, będzie:

$$(x-5)(x-6)=(x-2)(x-3)$$

czyli, wykonywając wskazane mnożenia:

$$x^2-11x+30=x^2-5x+6;$$

a przeto:

$$-11x+5x=6-30,$$

to jest: $\qquad -6x=-24;$

skąd: $\qquad 6x=24;$

i nakoniec: $\qquad x=4.$

179. Rozwiązać równanie:

$$0{,}5x+\frac{0{,}45x-0{,}75}{0{,}6}=\frac{1{,}2}{0{,}2}-\frac{0{,}3x-0{,}6}{0{,}9}.$$

Aby uniknąć pomyłek wyrazimy tutaj wszystkie ułamki dziesiętne pod postacią ułamków zwyczajnych. Tym sposobem równanie powyższe przedstawi się tak:

$$\frac{5x}{10}+\frac{10}{6}\left(\frac{45x}{100}-\frac{75}{100}\right)=\frac{10}{2}\times\frac{12}{10}-\frac{10}{9}\left(\frac{3x}{10}-\frac{6}{10}\right),$$

czyli, upraszczając ułamki:

$$\frac{x}{2}+\frac{5}{3}\left(\frac{9x}{20}-\frac{3}{4}\right)=6-\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right);$$

to jest:

$$\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5}{4}=6-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}.$$

Mnożąc obie strony równania przez 12, będzie:

$$6x+9x-15=72-4x+8;$$

przenosząc wyrazy niewiadome na pierwszą, a wiadome na drugą stronę:

$$19x=72+8+15=95,$$

skąd: $\qquad x=\frac{95}{19}=5.$

180. Mogą być równania dane do rozwiązania takie, że w nich *głoski* przedstawiają ilości wiadome; w takim razie ilość niewiadomą przedstawiać zawsze będziemy głoską x a każda inna głoska przedstawiać będzie ilość wiadomą.

Rozwiążemy tutaj trzy takie równania.

181. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez ab; otrzymamy:

$$bx+ax=abc;$$

czyli, wyłączając x za nawias:

$$(a+b)x=abc;$$

dzieląc zaś obie strony równania przez $a+b$, będzie:

$$x=\frac{abc}{a+b}.$$

182. Rozwiązać równanie:

$$(a+x)(b+x)=a(b+c)+\frac{a^2c}{b}+x^2.$$

Wykonywając mnożenia wskazane, otrzymujemy:

$$ab+ax+bx+x^2=ab+ac+\frac{a^2c}{b}+x^2.$$

skąd: $ax + bx = ac + \frac{a^2c}{b}$;

czyli: $(a+b)x = ac\left(1+\frac{a}{b}\right) = \frac{ac(a+b)}{b}$;

skąd, dzieląc obie strony równania przez $a+b$, wypada:

$$x = \frac{ac}{b}.$$

183. Rozwiązać:

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{(2x-a)^2}{(2x-b)^2}.$$

Znieśmy naprzód mianowniki; będzie:

$$(x-a)(2x-b)^2 = (x-b)(2x-a)^2;$$

czyli:

$$(x-a)(4x^2-4bx+b^2) = (x-b)(4x^2-4ax+a^2)$$

Wykonywając mnożenie, otrzymamy:

$$4x^3 - 4x^2(a+b) + x(4ab+b^2) - ab^2 = 4x^3 - 4x^2(a+b) +$$
$$+ x(4ab+a^2) - a^2b.$$

Stąd: $xb^2 - ab^2 = xa^2 - a^2b$;

czyli: $x(a^2-b^2) = a^2b - ab^2 = ab(a-b)$,

i dalej:

$$x = \frac{ab(a-b)}{a^2-b^2} = \frac{ab}{a+b}.$$

184. Jakkolwiek następujące równanie, ściśle biorąc, nie należy do obecnego rozdziału, z tem wszystkiem podajemy je tutaj, gdyż czytelnik nie znajdzie trudności w zrozumieniu pojedynczych działań przy rozwiązaniu, i może ono służyć za wzór postępowania w podobnych przypadkach. Jest ono podobne do równań poprzednio rozwiązanych w tem, że daje także tylko *jedną* wartość na niewiadomą.

Rozwiązać:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-16} = 8.$$

Przenosząc pierwszy wyraz na drugą stronę, otrzymamy:

$$\sqrt{x-16} = 8 - \sqrt{x};$$

podnosząc obie strony do kwadratu:

$$x - 16 = (8-\sqrt{x})^2 = 64 - 16\sqrt{x} + x;$$

przez nowe przeniesienie wyrazów będzie:

$$16\sqrt{x} = 64 + 16 = 80;$$

skąd: $\sqrt{x} = 5$;

i nakoniec. $x = 25.$

PRZYKŁADY XXI.

1. $\frac{12}{x} + \frac{1}{12x} = \frac{29}{24}$.
2. $\frac{42}{x-2} = \frac{35}{x-3}$.
3. $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x-5}{3} + \frac{x-3}{4} - \frac{x}{6} = x+1$.
4. $\frac{\frac{1}{2}x-3}{5} + \frac{\frac{3}{4}x-10}{2} + \frac{4-x}{4} = \frac{10-x}{6}$.
5. $x+1-\frac{x^2+3}{x+2} = 2$.
6. $x-3-(3-x)(x+1) = x(x-3)+8$.
7. $3-x-2(x-1)(x+2) = (x-3)(5-2x)$.
8. $(x+7)(x+1) = (x+3)^2$.
9. $\frac{3x-1}{2x-1} - \frac{4x-2}{3x-2} = \frac{1}{6}$.
10. $\frac{3-2x}{1-2x} - \frac{2x-5}{2x-7} = 1 - \frac{4x^2-1}{7-16x+4x^2}$.
11. $\frac{3+x}{3-x} - \frac{2+x}{2-x} - \frac{1+x}{1-x} = 1$.
12. $0{,}5x - 2 = 0{,}25x + 0{,}2x - 1$.
13. $0{,}5x + 0{,}6x - 0{,}8 = 0{,}75x + 0{,}25$.

14. $0{,}15x + \frac{0{,}135x - 0{,}225}{0{,}6} = \frac{0.36}{0{,}2} - \frac{0{,}09x - 0{,}18}{0{,}9}$

15. $a \cdot \frac{a - x}{b} - b \cdot \frac{b + x}{a} = x$.

16. $a \cdot \frac{x - a}{b} + b \cdot \frac{x - b}{b} = x$.

17. $(x-a)(x-b)(x+2a+2b) = (x+2a)(x+2b)(x-a-b)$.

18. $(a-b)(x-c) - (b-c)(x-a) - (c-a)(x-b) = 0$.

19. $(a-x)(b-x) = (p+x)(q+x)$.

20. $\sqrt{4x} + \sqrt{4x-7} = 7$.

21. $\sqrt{x+14} + \sqrt{x-14} = 14$.

22. $\sqrt{x+4ab} = 2a - \sqrt{x}$.

23. $\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} = \sqrt{a-b}$.

XXII.

Zagadnienia.

185. Zastosujemy teraz sposoby, wyłożone w dwóch poprzednich rozdziałach, do rozwiązania niektórych zagadnień, i tym sposobem przedstawimy czytelnikowi przykłady użycia zasad algebry.

W tych zadaniach pewne ilości są dane, — inne zaś mające pewne oznaczone związki z temi danemi, należy wynaleść; — ilość, którą należy wynaleść, nazywa się *niewiadomą*, lub *nieznaną*. Związki wspomniane powyżej są zazwyczaj wyrażone nie umówionemi znakami, lecz zwykłemi sposobami mówienia, w samem wypowiedzeniu zagadnienia.

Sposób rozwiązania zagadnienia może być w najogólniejszych wyrazach tak opisany: *Należy oznaczyć ilość niewiadomą głoską x. i wyrazić następnie językiem algebraicznym związki, jakie zachodzą pomiędzy tąż niewiadomą i ilościami danemi; w ten sposób otrzymamy pewne równanie, z którego można znaleść ilość niewiadomą.*

186. Suma dwóch liczb jest 85, a ich różnica 27; — znaleść te liczby.

Niech x oznacza mniejszą liczbę, wtedy, ponieważ różnica pomiędzy temi liczbami jest 27, liczba większa będzie $x + 27$; a że suma obu liczb jest 85, przeto będzie:

$$x + x + 27 = 85;$$

czyli: $\quad 2x + 27 = 85;$

stąd: $\quad 2x = 85 - 27 = 58;$

i nakoniec: $\quad x = \frac{58}{2} = 29.$

I tak więc liczba mniejsza jest 29, większa zaś $29 + 27$, czyli 56.

187. Podzielić 50 rubli pomiędzy trzy osoby A, B i C tak, aby B miała o 5 rb. więcej niż A, a C aby otrzymała tyle, ile osoby A i B razem.

Niech x oznacza liczbę rubli, zawartych w dziale osoby A, wtedy $x + 5$ oznaczać będzie to, co się dostało osobie B, a $2x + 5$ to, co się dostało osobie C. Całkowita liczba rubli jest 50; przeto:

$$x + x + 5 + 2x + 5 = 50;$$

to jest: $\quad 4x + 10 = 50;$

czyli: $\quad 4x = 50 - 10 = 40;$

skąd: $\quad x = 10.$

Więc osoba A dostała 10 rubli, osoba B — 15 rubli, a osoba C — 25 rubli.

188. Pewną kwotę pieniędzy rozdzielono pomiędzy osoby A, B i C; osoby A i B dostały razem $17\frac{3}{4}$ rub., osoby C i A dostały razem $15\frac{3}{4}$ rb; osoby zaś B i C dostały razem $12\frac{1}{2}$ rb.

Znaleść ile każda z tych osób dostała?

Niech x oznacza liczbę rubli, jaką otrzymała osoba A; wtedy B otrzymała $17\frac{3}{4} - x$ rubli, gdyż obie one razem dostały $17\frac{3}{4}$ rubli; podobnież osoba C dostała $15\frac{3}{4} - x$ rubli; gdyż A i C razem otrzymały $15\frac{3}{4}$ rubli. A ponieważ B i C razem otrzymały $12\frac{1}{2}$ rubli, przeto mieć będziemy równanie:

$$12\frac{1}{2} = 17\frac{3}{4} - x + 15\frac{3}{4} - x;$$

to jest:
$$12\frac{1}{2} = 33\frac{1}{2} - 2x;$$

czyli:
$$2x = 33\frac{1}{2} - 12\frac{1}{2} = 21;$$

skąd:
$$x = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}.$$

Stąd widzimy, że osoba A dostała $10\frac{1}{2}$ rb., B otrzymała $7\frac{1}{4}$ rb., C zaś $5\frac{1}{4}$.

189. Kupiec ma dwa gatunki herbaty; funt jednego gatunku kosztuje 2 rb., funt drugiego gatunku kosztuje $3\frac{1}{2}$ rb. Ile funtów powinien wziąć każdego gatunku, aby, po zmieszaniu, otrzymać 100 funtów herbaty po $2\frac{1}{2}$ rubli funt?

Niech x oznacza liczbę funtów pierwszego gatunku; — wtedy $100 - x$ będzie liczbą funtów drugiego gatunku. Wartość x funtów pierwszego gatunku jest $2x$ rubli; wartość zaś $100 - x$ funtów drugiego gatunku jest $\frac{7}{2}(100 - x)$ rubli.

Lecz całkowita wartość mieszaniny ma być $\frac{5}{2} \times 100$ rubli, przeto:

$$\frac{5}{2} \times 100 = 2x + \frac{7}{2}(100 - x).$$

Znosząc mianownik 2, będzie:

$$500 = 4x + 700 - 7x,$$

czyli:
$$7x - 4x = 700 - 500;$$

to jest:
$$3x = 200,$$

skąd:
$$x = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}.$$

Więc pierwszego gatunku powinien wziąć $66\frac{2}{3}$ funt., drugiego zaś $33\frac{1}{3}$ funtów.

190. Linię, długą na 2 stopy i 4 cale, podzielić na takie dwie części, aby jedna stanowiła trzy czwarte drugiej części

Niech x oznacza liczbę cali zawartych w części większej; wtedy $\frac{3x}{4}$ oznaczać będzie liczbę cali drugiej części.

Ponieważ cała linia zawiera 28 cali, przeto otrzymamy równanie:

$$x + \frac{3}{4}x = 28;$$

skąd:
$$4x + 3x = 112,$$

czyli:
$$7x = 112,$$

i nakoniec:
$$x = 16.$$

Jedna część mieć więc będzie 16 cali, druga zaś 12 cali.

191. Pewna osoba ma 1000 rb.; wypożyczywszy część tych pieniędzy po 4 od sta na rok, pozostałość zaś po 5 od sta na rok, otrzymała całkowitego procentu rocznego 44 rb.; ileż wypożyczyła na procent po 4%, a ile po 5%?

Niech x oznacza liczbę rubli wypożyczonych po 4 od sta, wtedy $1000 - x$ oznaczać będzie liczbę rubli, wypożyczonych po 5 od sta. Procent roczny od pierwszej sumy będzie $\frac{4x}{100}$, od drugiej zaś: $\frac{5(1000-x)}{100}$;

przeto: $$44 = \frac{4x}{100} + \frac{5(1000-x)}{100},$$

skąd: $$4400 = 4x + 5(1000 - x);$$

czyli: $$4400 = 4x + 5000 - 5x;$$

a następnie: $$x = 5000 - 4400 = 600.$$

Więc po 4 od sta wypożyczyła 600 rb., pozostałe zaś 400, po 5 od sta.

192. Główna trudność przy rozwiązywaniu zagadnienia polega w przekształceniu warunków zagadnienia, wyrażonych językiem zwyczajnym, na język algebraiczny; — początkujący nie powinien się zniechęcać, jeżeli nieraz znajdzie się pod tym względem w kłopocie, gdyż tylko przez wprawę i praktykę może nabrać w tem biegłości i pewności. Zróbimy tu jednę uwagę, bardzo ważną dla poczynających: to co się nazywa *ilością* niewiadomą, jest właściwie *liczbą* niewiadomą; i to powinno być wyraźnie zaznaczone przy układaniu równania.

Tak np. w drugiem zadaniu, które rozwiązywaliśmy, zaczynamy w ten sposób: niech x oznacza *liczbę* rubli zawartych w dziale osoby A; — początkujący często mówi niech x oznacza *pieniądze* osoby A, lub: to, co dostała osoba A: wyrażenie takie jest nieoznaczone, gdyż pieniądze osoby A mogą być wyrażone w rublach lub kopiejkach, lub też w ułamku całkowitej sumy. Podobnież w piątem z tych zadań, które rozwiązaliśmy, zaczynamy od wyrażenia: niech x oznacza *liczbę cali* zawartych w części dłuższej....; tymczasem początkujący często mówi: niech x oznacza dłuższą część, lub: niech

$x =$ jednej części; — tym sposobom wyrażania się można zrobić też same zarzuty, które były wyżej zaznaczone.

193. Bardzo często początkujący znajdują dlatego trudność w przekształceniu zagadnienia z języka zwyczajnego na język algebraiczny, że nie mogą zrozumieć warunków, wyrażonych językiem zwyczajnym. Jeżeli wyrazom, użytym do wypowiedzenia zagadnienia, nie można nadać żadnego logicznego znaczenia, wtedy oczywiście nie można ich przekształcić; lecz często się przytrafia, że wyrazy nie są same przez się niezrozumiałe, ale zdaje się, że mają więcej niż jedno znaczenie. Wtedy czytelnik powinien wybrać jedno z tych znaczeń, wyrazić je znakami algebraicznemi, i wynaleść odpowiedni wypadek. Jeżeli wypadek ten jest niemożliwy, lub niedorzeczny, wtedy należy sprobować innego znaczenia tychże wyrazów. Lecz jeżeli wypadek jest możliwy, wtedy czytelnik może z tego wnieść, że zrozumiał prawdopodobnie wyrazy należycie; w każdym razie interesującą jest rzeczą sprobować jeszcze innych znaczeń wyrazów, w celu przekonania się, czy sposób, w jaki zadanie wyrażono, rzeczywiście pozwala na więcej niż jedno rozwiązanie.

194. Czytelnik przy rozwiązywaniu zagadnień, podanych niżej dla ćwiczenia, znajdzie bez wątpienia znaczną liczbę takich, które można łatwo rozwiązać za pomocą arytmetyki, lub też przez proste odgadnięcie i następną próbę. To może go doprowadzić do lekceważenia siły i znaczenia algebry; — a nawet do takiego s[illegible]omoc jej jest zbyteczną i niepotrzebną. Lecz musimy tu na to odpowiedzieć, że za pomocą algebry czytelnik będzie w możności rozwiązania *wszystkich* tych zagadnień, bez żadnego wahania się lub niepewności a nadto przekona się w dalszym ciągu, że za pomocą algebry będzie w stanie rozwiązywać takie zadania, które byłyby niezmiernie trudne, lub zupełnie niemożliwe do rozwiązania, gdyby uciekał się do pomocy tylko samej arytmetyki.

PRZYKŁADY XXII.

1. Znaleść liczbę, która byłaby większą od swojej piątej części o 24?

2. Ojciec ma dziś 30 lat, a syn 2 lata; po ilu latach ojciec będzie 8 razy starszy od syna?

3. Różnica dwóch liczb jest 14, a ich suma 48; znaleść te liczby.

4. Dziecko urodziło się w Listopadzie, i 10 Grudnia miało tyle dni wieku, ile dni Listopada przeszło od początku tegoż miesiąca, do dnia jego urodzenia. Któregoż dnia Listopada urodziło się?

5. Jeżeli do podwojonej pewnej liczby dodamy 24, to otrzymamy sumę, która o tyle będzie większą od 80, o ile sama ta liczba jest mniejszą od 100. Znaleść tę liczbę?

6. Pewna ryba ma głowę długą na 9 cali, jej ogon jest tak długi, jak głowa i połowa tułowia, tułów zaś tak długi, jak głowa i ogon razem wzięte. Jakaż jest długość tułowia i ogona?

7. Liczbę 60 podzielić na takie dwie części, aby siódma część jednej, równała się ósmej części drugiej.

8. Z dwóch równych beczek piwa wytoczono: z pierwszej 34 garnce a z drugiej 80 garncy. Wtedy w pierwszej pozostało trzy razy tyle piwa, ile w drugiej. Ileż każda z tych beczek zawierała piwa, gdy była pełną?

9. Pewna osoba rozdała 20 ubogim 2 rs. 40 kop.: przyczem pewnej liczbie ubogich dała po 6 kopiejek, a pozostałym po 16 kopiejek. Iluż ubogim dała po 6, a ilu po 16 kopiejek?

10. Ojciec jest dziś trzy razy starszy od syna; przed czterema zaś laty, ojciec był cztery razy starszy od swego syna. Ileż lat ma dzisiaj ojciec, a ile syn?

11. Liczbę 100 podzielić na takie dwie części, aby po odjęciu trzeciej części jednej, od czwartej części drugiej, na resztę pozostało 11.

12. Dwie osoby A i B, grające z sobą, miały przy rozpoczęciu gry: A — 72 rb.; B zaś — 52 rb. Po przegraniu pewnej liczby partyj, okazało się, że osoba A ma trzy razy więcej pieniędzy, aniżeli osoba B. Ileż wygrała osoba A?

13. Znaleść taką liczbę, ażeby jej piąta część, więcej siódma część, przewyższała sumę jej ósmej i dwunastej części, o 113.

14. Armia przegrała bitwę, i wskutek tego utraciła jednę szóstą część swoich żołnierzy w zabitych i rannych, i 4000 wziętych do niewoli. Została następnie wzmocnioną o 3000 ludzi; — lecz będąc zmuszoną do cofania się, znowuż przytem straciła jednę czwartą część swego nowego składu. Po czem okazało się, że pozostało w niej 18000 ludzi. Ilużżołnierzy było z początku?

15. Pewna partya robotników otrzymała zapłaty 5 rb. 28 kop.; połowa całkowitej liczby robotników dostała po 18 kop., jedna trzecia część tejże całkowitej liczby robotników dostała po 24 kop.; reszta zaś po 30 kop. Iluż było wszystkich robotników?

16. Gospodarz umierając, pozostawił 550 rubli do rozdzielenia pomiędzy czterema służącymi A, B, C i D w ten sposób, aby B dostał dwa razy tyle co A, — C tyle, co B i A razem, — a zaś D tyle, ile C i B razem. Ileż każdy z nich dostał?

17. Znaleść dwie po sobie następujące liczby całkowite, takie: aby połowa pierwszej liczby dodana do piątej części tej pierwszej liczby, dała sumę równą sumie trzeciej i czwartej części drugiej liczby?

18. Kupiec ma dwa gatunki wina kaukazkiego: jeden gatunek po 48 kop. kwarta; drugi — po 80 kop. kwarta; z tych dwóch gatunków chce zrobić sto kwart mieszaniny po 56 kop. kwarta. Po ileż kwart ma wziąć każdego gatunku?

19. W pewnej ilości prochu strzelniczego, saletry jest o 6 funtów więcej, aniżeli wynosi połowa całej ilości prochu, siarki o 5 funtów mniej, aniżeli trzecia część, a węgla o 3 fun-

ty mniej, aniżeli czwarta część całej ilości prochu. Ileż funtów każdego z tych ciał znajduje się w tym prochu?

20. Dowodzący armią, po przegranej bitwie przekonał się, że pozostało mu zdatnych do boju o 3600 ludzi więcej, aniżeli było w połowie całej armii; rannych było o 600 więcej, aniżeli ósma część całej armii, pozostałość zaś, stanowiąca piątą część armii, była zabitych, wziętych do niewoli lub zbiegłych. Iluż ludzi było w całej armii?

XXIII.

Zagadnienia (ciąg dalszy).

195. Podamy teraz kilka przykładów, w których przekształcenie z języka zwyczajnego na algebraiczny jest cokolwiek trudniejsze, aniżeli w przykładach rozdziału poprzedniego.

196. Liczbę 80 podzielić na takie cztery części, aby pierwsza powiększona o 3, druga zmniejszona o 3, trzecia pomnożona przez 3, a czwarta podzielona przez 3, dały na wypadki ilości równe?

Niech x oznacza pierwszą część; wtedy, jeżeli ją powiększymy o 3, otrzymamy $x + 3$, i to ma być równe drugiej części, zmniejszonej o 3; więc część druga musi być równą $x + 6$. Dalej: część pierwsza powiększona o 3, czyli $x + 3$, ma być równe części trzeciej, pomnożonej przez 3; przeto ta część trzecia musi być $\frac{x+3}{3}$. I nakoniec, ponieważ $x + 3$ ma być równe części czwartej, podzielonej przez 3, przeto część czwarta będzie $3(x + 3)$. Suma tych wszystkich części ma być równą 80; zatem:

$$x + x + 6 + \frac{x+3}{3} + 3(x + 3) = 80,$$

skąd: $$7x = 168,$$

a następnie: $$x = \frac{168}{7} = 24.$$

Pierwsza część jest więc 24, a druga 56 — 24, czyli 32.

Powyższy sposób rozwiązania jest najbardziej naturalny; następujący jednak jest o wiele krótszy:

Oznaczmy część pierwszą przez $3x$; wtedy część druga będzie $4x$, gdyż pierwsza tak się ma do drugiej, jak 3 do 4. Suma tych dwóch części jest równą 56, przeto:

$$3x + 4x = 56,$$

czyli: $$7x = 56;$$

skąd: $$x = \frac{56}{7} = 8.$$

Zatem część pierwsza jest 3×8, czyli 24, druga zaś 4×8, czyli 32.

204. Jedna beczka, A, zawiera 12 garncy wina i 18 garncy wody; druga beczka, B, zawiera 9 garncy wina i 3 garnce wody; ileż należy wziąć garncy z każdej beczki, ażeby utworzyć mieszaninę, złożoną z 7 garncy wina i 7 garncy wody?

Niech x oznacza liczbę garncy, jaką należy wziąć z A; wtedy, ponieważ mieszanina ma zawierać 14 garncy, przeto $14 - x$ oznaczać będzie liczbę garncy, jaką należy wziąć z B. Liczba wszystkich garncy, zawartych w A, jest 30, — z nich 12 jest winem; przeto wino w tej beczce stanowi $\frac{12}{30}$ całości. A zatem w x garncach, zaczerpniętych z A, znajdować się będzie $\frac{12x}{30}$ garncy wina. Podobnież w $14 - x$ garncach, zaczerpniętych z B, znajduje się czystego wina $\frac{9(14 - x)}{12}$ garncy. Lecz mieszanina ma zawierać 7 garncy wina; przeto:

$$\frac{12x}{30}+\frac{9(14-x)}{12}=7,$$

czyli: $$\frac{2x}{5}+\frac{3(14-x)}{4}=7;$$

skąd: $$8x+15(14-x)=140;$$

i dalej: $$8x+210-15x=140;$$

następnie: $$7x=70,$$

i nakoniec, $$x=10.$$

Przeto z A należy wziąć 10 garncy, a z B, — 4 garnce.

205. O jakim czasie, między godziną 2-gą i 3-ią, jedna skazówka zegarka dokładnie przykrywa drugą?

Niech x oznacza szukaną liczbę minut po 2-giej. W przeciągu x minut długa skazówka przesunie się przez x podziałek cyferblatu; a że długa skazówka porusza się 12 razy prędzej niż krótka, przeto krótka przesunie się w tymże samym czasie o $\frac{x}{12}$ podziałek. O godzinie drugiej, krótka skazówka jest o 10 podziałek przed długą; — ta ostatnia więc, w ciągu x minut, musi przejść o 10 podziałek więcej aniżeli krótka; mieć będziemy przeto równanie:

$$x=\frac{x}{12}+10;$$

czyli: $$12x=x+120,$$

stąd: $$11x=120$$

i nakoniec $$x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}.$$

206. Zając robi cztery skoki w tym czasie, w którym chart robi ich trzy; lecz dwa skoki charta stanowią taką długość, jak trzy skoki zająca. Zając ten był oddalony na 50 swoich skoków od charta w chwili, gdy ten ostatni zaczął go ścigać; ileż skoków zrobi chart zanim dogoni zająca?

Przypuśćmy, że $3x$ oznacza liczbę skoków charcich;

wtedy $4x$ oznaczać będzie liczbę skoków, zrobionych przez zająca w tym samym czasie. Niech a oznacza w calach długość skoku zająca, wtedy $3a$ oznaczać będzie liczbę cali zawartą w trzech skokach zająca; — a zatem także i liczbę cali w dwóch skokach charta. Długość skoku charta w calach będzie więc $\frac{3a}{2}$. Dalej: liczba cali, zawartych w $3x$ skokach charta będzie: $3x \times \frac{3a}{2}$; liczba zaś cali, zawartych w $50+4x$ skokach zająca bądzie $(50+4x)a$. Stąd otrzymujemy równanie:

$$\frac{9ax}{2}=(50+4x)a.$$

Dzieląc obie strony przez a, będzie:

$$\frac{9x}{2}=50+4x,$$

skąd: $$9x=100+8x,$$

i nakoniec: $$x=100.$$

Chart przeto musi zrobić 300 skoków.

Zwracamy tu uwagę czytelnika na to, żeśmy wprowadzili do zadania pomocniczy znak a, aby łatwiej ułożyć równanie; znak ten znikł następnie przez dzielenie z równania.

207. Czterech graczy A. B, C i D zasiadło do gry, każdy z inną sumą pieniędzy. Po skończonej grze A wygrał połowę tego, co B miał z początku, zasiadając do gry; B wygrał trzecią część tego, co miał C; C wygrał czwartą część tego, co miał D, a D wygrał piątą część tego, co miał A; poczem okazało się, że każdy z nich ma 23 ruble. Ileż każdy z nich miał, siadając do gry?

Niech x oznacza liczbę rubli, którą D wygrał od A, wtedy A miał z początku $5x$; a po przegraniu do D piątej części pozostało mu $4x$. Ta ostatnia ilość, wraz z tem, co A wygrał od B stanowi 23; przeto $23-4x$ oznaczać będzie liczbę rubli, którą A wygrał od B. A że A wygrał połowę tego, co miał B, więc $23 - 4x$ oznaczać także będzie to, co zostało B po przegraniu partyi.

I dalej: $23 - 4x$ razem z tem, co B wygrał od C, stanowi 23; przeto $4x$ oznacza liczbę rubli, jaką B wygrał od C. A ponieważ B wygrał trzecią część tego, co miał C, zatem C miał z początku $12x$, a po przegraniu $8x$.

Dalej jeszcze: $8x$ razem z tem, co C wygrał od D, powinno stanowić 23; przeto $23 - 8x$ oznacza liczbę rubli, jaką C wygrał od D. A że C wygrał czwartą część tego, co miał D, więc $4(23 - 8x)$ oznaczać będzie sumę, jaką miał D z początku, a $3(23 - 8x)$ to, co mu po przegraniu do C pozostało.

Ostatecznie więc $3(23 - 8x)$ razem z x, to jest liczbą rubli, jaką D wygrał od A, stanowić będzie 23 rubli; otrzymamy przeto równanie:

$$23 = 3(23 - 8x) + x,$$

skąd:

$$23x = 46,$$

$$x = 2.$$

Więc gracze z początku mieli 10, 30, 24 i 28 rubli.

208. Ojciec, umierając, pozostawia pewną liczbę dzieci i majątek, który testamentem poleca rozdzielić pomiędzy nie, w następujący sposób:

Najstarsze dostaje 100 rs. i dziesiątą część tego, co pozostanie, po wzięciu tych stu rubli;

Drugie dostaje 200 rubli i znowuż dziesiątą część tego, co pozostanie;

Trzecie dostaje 300 rubli i dziesiątą część tego, co pozostanie;

Czwarte podobnież dostaje 400 rubli i dziesiątą część tego, co pozostanie;

I tak dalej.

Po wykonaniu woli zmarłego, pokazało się, że cały majątek został równo podzielony pomiędzy wszystkie dzieci.

Ileż było dzieci i ile rubli wynosił majątek?

To zagadnienie jest całkiem szczególnej natury, i przez to samo zasługuje na staranny rozbiór. Aby je łatwiej rozwiązać, przypuśćmy, że cały majątek wynosił z rubli; a ponieważ wszystkie dzieci otrzymują jednakową sumę, oznaczmy dział każdego dziecka przez x. Tym sposobem liczba dzieci będzie $\frac{z}{x}$. Wprowadziwszy te oznaczenia, ułożymy następującą tablicę, w celu rozwiązania zadania:

Suma do podziału.	Dziecko	Dział każdego dziecka	Różnice
z	1-sze	$x = 100 + \frac{z - 100}{10}$	
$z - x$	2-gie	$x = 200 + \frac{z - x - 200}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - 2x$	3-cie	$x = 300 + \frac{z - 2x - 300}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - 3x$	4-te	$x = 400 + \frac{z - 3x - 400}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - 4x$	5-te	$x = 500 + \frac{z - 4x - 500}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$

i tak dalej.

W ostatniej kolumnie pomieściliśmy różnice, otrzymane przez odjęcie każdego działu od następującego. Ponieważ wszystkie działy są równe, przeto różnice powinny być równe 0. A ponieważ nadto, szczęśliwym trafem, jedno i toż samo wyrażenie przedstawia wszystkie te różnice, więc dostateczną będzie rzeczą do oznaczenia x, przyrównać którąkolwiek z tychże różnic do zera. Tym sposobem otrzymamy równanie:

$$100-\frac{x+100}{10}=0;$$

mnożąc obie strony przez 10, znajdziemy:

$$1000-x-100=0;$$

czyli: $900-x=0$:

skąd: $x=900$.

Dział więc każdego dziecka wynosi 900 rubli.

Podstawiając tę wartość znalezioną na x w którekolwiek z równań trzeciej kolumny, naprzykład w pierwsze, otrzymamy:

$$900=100+\frac{z-100}{10},$$

skąd odrazu znajdziemy wartość na z, gdyż:

$$9000=1000+z-100$$

czyli: $9000-1000+100=z$

albo: $z=8100$.

Nakoniec liczba dzieci otrzyma się z wyrażenia $\frac{z}{x}$; liczba ta będzie więc równą 9.

Znaleźliśmy zatem odpowiedź zupełną na zadane pytanie taką: dzieci było 9, majątek pozostawiony był 8100 rb., a dział każdego z dzieci wynosił 900 rb.

PRZYKŁADY XXIII.

1. Statek korsarski, płynący z prędkością 10 wiorst na godzinę, spostrzega okręt w oddaleniu 18 wiorst, i płynący z prędkością 8 wiorst na godzinę. Ileż wiorst okręt przepłynie, zanim zostanie dognany przez korsarza.

2. Znaleść dwie liczby, których różnica wynosi 4, a różnica kwadratów tych liczb wynosi 112.

3. 24 osoby złożyły sumę 24 rubli; niektóre z tych osób składały po $\frac{3}{4}$ rb., pozostałe zaś po $1\frac{1}{8}$ rb. Ileż było osób które dały po $\frac{3}{4}$, a ile, które dały po $1\frac{1}{8}$ rb.?

4. Wodozbiór może być napełniony w 12 minutach wodą, wpływającą przez 2 rury; jedną rurą woda wpływająca może go napełnić w 20 minut; — w iluż minutach może on być napełniony przez samą drugą rurę?

5. Liczbę 100 podzielić na takie dwie części, aby różnica kwadratów tychże części wynosiła 1000?

6. Z dwóch miast, znajdujących się w odległości 154 wiorst, wychodzą dwie osoby w jednym i tym samym czasie, i idą naprzeciwko siebie. Pierwsza przechodzi 9 wiorst w 2 godziny; druga zaś 15 wiorst w 4 godz.; kiedy one się spotkają?

7. Kupił ktoś pewną liczbę jajek; połowę tych jajek kupował po 2 jajka za dziesiątkę, a drugą połowę po 3 jajka za dziesiątkę; sprzedał je następnie w ten sposób, że dawał 5 jajek za dwie dziesiątki i stracił na tym handlu jedną dziesiątkę. Ileż jajek kupił?

8. Sumę 2000 rb. rozdzielono pomiędzy dwie osoby tak, że części otrzymane przez te osoby tak się miały do siebie, jak 7 do 9; ileż otrzymała każda z tych osób?

9. Liczbę 100 podzielić na takie dwie części, aby kwadrat ich różnicy przewyższał kwadrat podwojonej mniejszej części o 2000?

10. Do wodozbioru prowadzą dwie rury; pierwszą z nich wodozbiór może być napełniony w $4\frac{1}{2}$ godzinach; drugą w 6-ciu godzinach; u spodu wodozbioru znajduje się klapa, która może go wypróżnić w 5-ciu godzinach. W iluż

godzinach będzie napełniony wodozbiór, jeżeli otworzymy obie rury i klapę?

11. Przekupka kupiła pewną liczbę jajek po 4 grosze; sprzedała zaś połowę tych jajek po 5 groszy sztuka, a pozostałą połowę po 3 sztuki za 10 groszy i na wszystkiem zyskała 40 groszy. Ileż było jajek?

12. Dwie osoby *A* i *B* strzelają kolejno do celu. Na każde 12 danych strzałów, osoba *A* trafia w sam środek 7 razy, osoba zaś *B*, ta tęż samę liczbę strzałów — 9 razy. Strzelając tak przez pewien przeciąg czasu, dały razem 32 celne strzały. Ileż razy każda z nich dała ognia?

13. Dwie beczki *A* i *B* zawierają mieszaniny wina i wody; w *A* ilość wina jest w takim stosunku do ilości wody, w jakim jest 4 do 3; w *B* ten sam stosunek jest 2 do 3. Beczka *A* zawiera 84 garnce; ileż *B* musi zawierać, aby, po zlaniu zawartości obu beczek w trzecią beczkę, w tej ostatniej mieszanina była złożoną z równych ilości wina i wody?

14. Ileż minut brakuje do czwartej, jeżeli przed trzema kwadransami było dwa razy tyleż minut po drugiej?

15. O której godzinie między 3-cią i 4-tą jedna skazówka zegarka będzie ściśle na przedłużeniu drugiej skazówki?

16. Skazówki zegarka tworzą kąt prosty o godzinie 3-ciej; o jakim czasie będą następnie znowuż tworzyć kąt prosty?

17. Ma ktoś dwa kubki srebrne i jednę do nich pokrywkę. Pierwszy kubek waży 12 łutów; a jeżeli na niego nałożyć pokrywkę, wtedy razem z nią ważyć będzie dwa razy więcej, aniżeli drugi kubek. Jeżeli zaś nakryć drugi kubek, wtedy on razem z pokrywką ważyć będzie trzy razy tyle, co pierwszy. Znaleść wagę drugiego kubka i pokrywki.

18. Powietrze atmosferyczne składa się z 2-ch gazów: tlenu i azotu, pomieszanych z sobą w takim stosunku, że na 21 części, co do do objętości, tlenu, idzie 79 części azotu. Ileż

każdego z tych gazów znajduje się w pokoju długim na 4 metry, szerokim na 3 metry i wysokim na 2,5 metra?

19. Gospodarz wiejski ma gęsi i owce — razem 432 sztuki. Ponieważ nie chce się dalej zajmować hodowlą gęsi, przeto wymienia wszystkie swoje gęsi na owce i dostaje przy tej wymianie 3 owce za każde 32 gęsi. Po tej wymianie okazało się, że jest posiadaczem stada owiec, liczącego 200 sztuk. Ileż gęsi on wymienił na owce?

20. Pewien próżniak od 18 roku życia aż do śmierci przespał $\frac{3}{8}$ czasu, $\frac{1}{16}$ część zużył na jedzenie i picie, $\frac{1}{4}$ przepędził na przechadzkach, $\frac{3}{16}$ stracił na grę w karty, $\frac{1}{16}$ spędził siedząc w fotelu i nie myśląc o niczem, a przez cały ten czas tylko dwa lata pracował. Ileż lat on żył?

21. Gracz przegrał z początku $\frac{1}{6}$ część swoich pieniędzy, a potem 247 rubli, i pozostało mu tyle kopiejek, ile przed grą miał rubli. Ileż miał pieniędzy siadając do gry?

22. Wieśniaczka przyniosła na targ pewną liczbę jajek. Pierwszemu kupującemu sprzedała połowę wszystkich jajek i jeszcze połowę jednego jajka (nie tłukąc i nie dzieląc wszakże żadnego); drugiemu kupującemu — połowę tego co jej zostało i jeszcze połowę jajka; trzeciemu — znowuż połowę tego, co jej zostało i pół jajka, i tak samo czwartemu i piątemu. Po tem wszystkiem pozostało jej jedno jajko. Ileż jajek przyniosła na targ?

23. Na grobie sławnego matematyka greckiego *Diophantes'a* (jednego z twórców algebry), znajduje się napis, oznaczający w następny sposób liczbę lat, jaką on żył:

Diophantes był dzieckiem $\frac{1}{6}$ część swego życia, $\frac{1}{12}$ część był młodzieńcem, następnie ożenił się, i przeżył w związku małżeńskim $\frac{1}{7}$ część swego życia, powiększoną o 5 lat, zanim narodził mu się syn, który wszakże o 4 lat wcześniej umarł, aniżeli Diophantes, i żył tylko połowę tej liczby lat, jaką żył ojciec. Ileż lat żył Diophantes?

24. Rok śmierci króla Jana Sobieskiego wyraża się liczbą czterocyfrową, w której pierwszą cyfrą z lewej strony jest 1. Jeżeli tę jedność przeniesiemy z pierwszego miejsca na ostatnie miejsce, wtedy otrzymamy nową liczbę, która będzie o 177 większą, od cztery razy wziętej liczby, wyrażającej rok śmierci Jana III-go. W którym roku umarł król Jan Sobieski?

25. W dawnych książkach znajdujemy takie zadanie:

Pewna Greczynka weszła do świątyni Zeusa i prosiła go, ażeby podwoił tę sumę pieniędzy, jaką miała przy sobie. Zeus uczynił to. Wtedy na znak podziękowania, złożyła w świątyni dwie drachmy. Z tem co jej pozostało weszła do świątyni Apollina i prosiła o toż samo. I Apollo przychylił się do jej prośby, za co znowuż w jego świątyni ofiarowała dwie drachmy. Porachowała teraz pieniądze, — i okazało się, że ma dwa razy tyle, ile miała z początku. Ileż miała, wchodząc do świątyni Zeusa?

26. Okręt żaglowy płynął od pewnego miejsca A do miejsca B, leżącego na zachód. Gdy już się znajdował oddalony tylko na 4 mile od miejsca swego przeznaczenia, został cofnięty przez wiatr przeciwny o $\frac{1}{19}$ część tej drogi, jaką przebył. Następnie po ustaniu wiatru, dalej płynął ku zachodowi; lecz przebywszy $\frac{1}{24}$ część tej odległości, w jakiej się znajdował od A, wskutek działania nowego wiatru przeciwnego, znowu został cofnięty o $\frac{1}{20}$ część teraźniejszej odległości od A. Gdy wiatr powtórnie ustał, okręt, przepłynąwszy $\frac{1}{9}$ część ostatniej odległości od A przybył do portu. Jakaż jest odległość miasta A od B, i ile mil okręt przepłynął?

27. Z czterech miasteczek A, B, C i D, leżących na jednej drodze, wyjeżdżają dyliżansem pocztowym cztery osoby, i jadą do jednego miasta E. Odległość A od B wynosi 19 mil; B od C wynosi 3 mile, a C od D 5 mil. Przy opłacie należności pocztowej okazało się, że osoba, wyjeżdżająca z A zapłaciła za drogę tyle, ile trzy pozostałe osoby razem. Jak z tego obliczyć odległość miasta D od E?

28. Dwa ciała poruszają się, zaczynając od dwóch punktów A i B, których odległość wynosi d metrów, *w tym samym kierunku.* Jedno z tych ciał przebywa w każdej jednostce czasu (np. sekundzie) c metrów, drugie zaś c' metrów. Kiedy i gdzie te dwa ciała spotkają się? W jakim przypadku rozwiązanie zadania jest niemożliwe?

29. Dwa ciała wyruszają w jednej i tej samej chwili z dwóch punktów A i B, których odległość wynosi d metrów, i idą w *kierunkach przeciwnych.* Pierwsze przechodzi c metrów, drugie zaś c' metrów w każdej jednostce czasu. W jakim czasie, i w jakiej odległości od punktów A i B te dwa ciała spotkają się?

30. Dwa ciała wychodzą z tego samego punktu S, i oba poruszają się *w tym samym kierunku.* Pierwsze przebiega w każdej jednostce czasu c metrów; drugie zaś, które wyszło w n jednostek czasu później z S, przebiega w każdej jednostce czasu, c' metrów. Po upływie jakiego czasu, licząc od wyjścia drugiego ciała z punktu S, oba te ciała spotkają się? Jaki związek powinien istnieć pomiędzy ilościami c, c' i n, aby rozwiązanie zadania było możliwem?

31. Dwa ciała wyruszają w jednym czasie z dwóch punktów, odległych na 243 metrów w *kierunkach przeciwnych;*

pierwsze przebiega na minutę 5, drugie zaś 7 metrów. Po upływie jakiego czasu odległość pomiędzy niemi wynosić będzie 39 metrów?

32. Na samym środku stawu kwadratowego, mającego długości i szerokości 10 stóp, wyrasta trzcina, wznosząca się na jednę stopę nad wodę. Jeżeli tę trzcinę przyciągniemy do środka jednego z boków stawu, wtedy ona swoim wierzchołkiem dosięgnie samego brzegu. Jak głęboki jest staw?

33. Młoda topola, wysoka na 10 stóp, została przez wiatr złamaną w takiej wysokości, że jej wierzchołek, oparty teraz na ziemi, znajduje się w odległości 3 stóp od podstawy pnia. W jakiejże wysokości została ona złamaną? (1)

34. Łąkę mającą 40 morgów, 8 koni objadły w ciągu 7 tygodni, tak, że została zjedzoną nie tylko trawa, jaka się z początku na niej znajdowała, ale także i ta, która w ciągu tego czasu przyrosła. Inną łąkę, mającą 50 morgów, tej samej wartości gruntu, 9 koni objadło w podobny sposób w ciągu 8 tygodni. Ileż koni może być utrzymywanych na takiejże samej łące, liczącej 60 morgów, przez przeciąg 12 tygodni? Jak wyrazić i rozwiązać podobne zadanie w sposób ogólny?

XXIV.

Równania jednoczesne stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi.

209. Przypuśćmy, że mamy równanie zawierające dwie ilości niewiadome x i y; np. $3x - 7y = 8$. Nadając jakąkolwiek wartość dowolną na jednę z tych niewiadomych, możemy znaleść z tegoż równania odpowiednią wartość na drugą. Tym sposobem możemy znaleść tyle par wartości, zadosyć

(1) Do dwóch ostatnich zagadnień, trzeba użyć twierdzenia Pythagoresa.

czyniących danemu równaniu, ile tylko chcemy. Tak naprzykład, jeżeli $y = 1$ będzie $3x = 15$, a przeto $x = 5$; również jeżeli $y = 2$, będzie $3x = 22$, skąd $x = 7\frac{1}{3}$; — i tak dalej.

Podobnież, jeżelibyśmy mieli inne równanie tego samego rodzaju, np. $2x + 5y = 44$, i z niego możemy oznaczyć tyle wartości, ile nam się spodoba, zadosyć mu czyniących.

Lecz jeżelibyśmy chcieli wynaleść te wartości, które zadosyć czynią jednocześnie *obu równaniom*, wtedy znaleźlibyśmy, że tylko jedna jest taka wartość na x i jedna na y. Gdyż: pomnóżmy pierwsze równanie przez 5, będzie:

$$15x - 35y = 40;$$

drugie zaś równanie przez 7, otrzymamy:

$$14x + 35y = 308.$$

Zatem, przez dodanie odpowiedniemi stronami tych równań:

$$15x - 35y + 14x + 35y = 40 + 308,$$

to jest:

$$29x = 348,$$

skąd:

$$x = \frac{348}{29} = 12.$$

Widzimy stąd, że jeżeli wartość na x ma zadosyć uczynić *obu równaniom*, wtedy *musi* być ona równą 12. Podstawmy tę wartość w którekolwiek z danych równań, np. w drugie, wtedy otrzymamy:

$$24 + 5y = 44,$$

czyli:

$$5y = 20,$$

skąd:

$$y = 4.$$

210. Dwa, lub więcej równań, którym mają zadosyć czynić *też same wartości* na niewiadome, nazywają się *równaniami jednoczesnemi*. W obecnym rozdziale zajmiemy się równaniami jednoczesnemi, zawierającemi tylko dwie ilości niewiadome, i w których każda niewiadoma wchodzi tylko w stopniu pierwszym, i nadto jedna niewiadoma nie jest mnożoną przez drugą niewiadomą.

211. Do rozwiązywania tych równań używa się zwykle jednego z trzech sposobów, które zaraz wyłożymy. Wszystkie te trzy sposoby, mają jednę zasadę wspólną — mianowicie: *z dwóch równań danych*, zawierających *dwie niewiadome*, wyprowadza się *jedno* równanie, zawierające tylko *jednę* niewiadomą. Gdy tak postępujemy, wtedy mówimy że z tych dwóch równań *rugujemy* jednę niewiadomą; tę mianowicie, która do ostatecznego, jednego równania *nie wchodzi*. To ostateczne równanie, zawierające tylko jednę niewiadomą, może być rozwiązane sposobem podanym w rozdziale XX; i gdy wartość na tę niewiadomą została tym sposobem oznaczoną, wtedy możemy ją podstawić w którekolwiek z równań danych, i oznaczyć w końcu wartość drugiej niewiadomej.

212. *Sposób pierwszy*). Należy pomnożyć każde z danych równań przez liczbę tak wybraną, aby, po pomnożeniu, współczynniki przy jednej z niewiadomych stały się równymi:— wtedy przez dodanie lub odjęcie tychże równań, otrzymamy równanie zawierające tylko jednę niewiadomą.*

Tego właśnie sposobu użyliśmy w artykule 209: jako inny przykład weźmy równania:

$$8x + 7y = 100,$$
$$12x - 5y = 88.$$

Aby wyrugować y pomnóżmy pierwsze równanie przez 5, t. j. przez współczynnik przy y w drugiem równaniu; drugie zaś równanie przez 7, t. j. przez współczynnik przy y w równaniu pierwszem. Tym sposobem otrzymamy:

$$40x + 35y = 500,$$
$$84x - 35y = 616.$$

Dodając te równania, będzie:

$$40x + 84x = 500 + 616,$$

*) Sposób ten nazywają niekiedy „*angielskim*“.

czyli: $124x = 1116,$
skąd: $x = 9.$

Podstawiając tę wartość w którekolwiek z danych równań, naprzykład w drugie, otrzymamy:

$$108 - 5y = 88,$$
to jest: $20 = 5y,$
skąd: $y = 4.$

Przypuśćmy teraz, że dla rozwiązania tych równań chcemy z początku wyrugować z nich x. Jeżeli pomnożymy pierwsze równanie przez 12, a drugie przez 8, otrzymamy:

$$96x + 84y = 1200.$$
$$96x - 40y = 704.$$

Odejmując następnie od pierwszego równania drugie mieć będziemy:

$$84y + 40y = 1200 - 704;$$
czyli: $124y = 496,$
skąd: $y = 4.$

Do tegoż samego wypadku moglibyśmy dojść prościej, mnożąc pierwsze równanie przez 3, a drugie przez 2; wtedy:

$$24x + 21y = 300,$$
$$24x - 10y = 176.$$

Po odjęciu:

$$21y + 10y = 300 - 176;$$
czyli: $31y = 124,$
skąd: $y = 4.$

213. Drugi sposób (przez podstawienie).

Należy wyrazić jednę niewiadomą z jednego z dwóch równań za pomocą drugiej niewiadomej, i tak znalezioną wartość podstawić w drugie równanie.

Tak naprzykład, biorąc też same równania, co w poprzednim artykule, mamy z pierwszego równania:

$$8x = 100 - 7y,$$

skąd: $$x = \frac{100 - 7y}{8}.$$

Podstawiając tę wartość na x w równanie drugie otrzymamy:

$$\frac{12\,(100 - 7y)}{8} - 5y = 88,$$

czyli: $$\frac{3\,(100 - 7y)}{2} - 5y = 88;$$

znosząc mianownik:

$$3\,(100 - 7y) - 10y = 176;$$

czyli: $$300 - 21y - 10y = 176;$$

skąd: $$300 - 176 = 21y + 10y;$$

dalej: $$31y = 124,$$

i nakoniec: $$y = 4.$$

Podstawiając następnie tęż wartość na y w którekolwiek z danych równań, otrzymamy:

$$x = 9.$$

Albo jeszcze możemy tak postępować: z pierwszego równania mamy:

$$7y = 100 - 8x,$$

skąd: $$y = \frac{100 - 8x}{7}.$$

Podstawiając tę wartość w równanie drugie, otrzymamy:

$$12x - \frac{5\,(100 - 8x)}{7} = 88;$$

i dalej: $$84x - 5\,(100 - 8x) = 616;$$

czyli: $$84x - 500 + 40x = 616,$$

skąd: $$124x = 500 + 616 = 1116,$$

i nakoniec: $$x = 9.$$

214. Trzeci sposób (przez porównanie niewiadomych): *Należy jednę i tęż samę niewiadomą, wyrazić za pomocą drugiej niewiadomej z każdego z danych równań i tak otrzymane wyrażenia uczynić równemi.*

Weźmy, jako przykład, też same dwa równania. Z pierwszego równania otrzymujemy:

$$x = \frac{100 - 7y}{8},$$

z drugiego zaś:

$$x = \frac{88 + 5y}{12}.$$

Więc: $$\frac{100 - 7y}{8} = \frac{88 + 5y}{12}.$$

Znieśmy mianowniki, przez pomnożenie obu stron równania przez 24, otrzymamy:

$$3\,(100 - 7y) = 2\,(88 + 5y),$$

skąd: $$300 - 21y = 176 + 10y;$$

i dalej: $$300 - 176 = 21y + 10y,$$

to jest: $$31y = 124;$$

i nakoniec: $$y = 4.$$

Następnie, w podobny sposób jak pokazano poprzednio, możemy wyprowadzić, że $x = 9$.

Albo też można postępować w ten sposób: z pierwszego równania wynajdujemy:

$$y = \frac{100 - 8x}{7}$$

z drugiego zaś:

$$y = \frac{12x - 88}{5};$$

stąd: $$\frac{100 - 8x}{7} = \frac{12x - 88}{5}.$$

Z tego równania znajdziemy, że: $x = 9$, a następnie tak samo jak wyżej: $y = 4$.

215. Rozwiązać równania:

$$19x - 21y = 100;$$
$$21x - 19y = 140.$$

Równania te mogą być rozwiązane sposobami podanymi wyżej; lecz umyślnie wybraliśmy je tutaj, aby pokazać, że sposoby te mogą być niekiedy uproszczone.

Dodając te równania, otrzymujemy:

$$19x - 21y + 21x - 19y = 100 + 140,$$

czyli:
$$40x - 40y = 240,$$

skąd
$$x - y = 6.$$

I znowuż, przez odjęcie początkowych równań, mieć będziemy:

$$21x - 19y - 19x + 21y = 140 - 100,$$

to jest:
$$2x + 2y = 40,$$

skąd:
$$x + y = 20.$$

Ponieważ więc: $x - y = 6$, i $x + y = 20$, przeto, przez dodanie tych ostatnich równań, będzie:

$$2x = 26,$$

a przez odjęcie:
$$2y = 14;$$

skąd:
$$x = 13, \quad y = 7.$$

216. We wszystkich częściach algebry można znaleść szczególne przykłady, które mogą być traktowane sposobami krótszymi, aniżeli sposoby podane przez prawidła ogólne, lecz do tych skróceń uczący się może dojść tylko przez wprawę i długie ćwiczenia; i z tego powodu w samych początkach nauki nie powinien napróżno tracić wiele czasu na ich wynajdywanie.

217. Rozwiązać równania:

$$\frac{12}{x} + \frac{8}{y} = 8;$$
$$\frac{27}{x} - \frac{12}{y} = 3.$$

Gdybyśmy znieśli mianowniki w powyższych równaniach, wtedy wystąpiłby w nich iloczyn xy ilości niewiadomych. Równania takie, ściśle biorąc, nie należą do obecnego rozdziału. Lecz mogą one być rozwiązane podanymi sposobami, jak to zobaczymy zaraz. Pomnóżmy bowiem pierwsze równanie przez 3 a drugie przez 2 i dodajmy tak otrzymane równania; znajdziemy:

$$\frac{36}{x} + \frac{24}{y} + \frac{54}{x} - \frac{24}{y} = 24 + 6;$$

czyli:
$$\frac{36}{x} + \frac{54}{x} = 30,$$

to jest:
$$\frac{90}{x} = 30;$$

skąd:
$$90 = 30x;$$

a następnie:
$$x = 3.$$

Podstawmy tę wartość w równanie pierwsze, będzie:

$$\frac{12}{3} + \frac{8}{y} = 8,$$

skąd:
$$\frac{8}{y} = 8 - 4 = 4,$$

a następnie:
$$8 = 4y,$$

i nakoniec:
$$y = 2.$$

218. Rozwiązać równania:

$$a^2x + b^2y = c^2,$$
$$ax + by = c.$$

Tutaj x i y oznaczają ilości *niewiadome*, inne zaś głoski oznaczają ilości *wiadome*.

Pomnóżmy drugie równanie przez b i odejmijmy je następnie od pierwszego. Otrzymamy:

$$a^2x + b^2y - abx - b^2y = c^2 - bc,$$

czyli:
$$a(a - b)x = c(c - b);$$

skąd:
$$x = \frac{c(c-b)}{a(a-b)}.$$

Podstawmy tę wartość na x w równanie drugie; będzie:
$$\frac{ac(c-b)}{a(a-b)} + by = c;$$

skąd: $by = c - \frac{c(c-b)}{a-b} = \frac{c(a-b)-c(c-b)}{a-b} = \frac{c(a-c)}{a-b};$

i nakoniec:
$$y = \frac{c(a-c)}{b(a-b)} = \frac{c(c-a)}{b(b-a)}.$$

Albo też wartość na y może być znalezioną w podobny sposób, jak była znalezioną wartość na x [1]).

[1]) Sposoby rugowania niewiadomych z dwóch równań, podane w tekście i następnie rozwiązanie tychże równań opierają się na następującem twierdzeniu:

Gdy dwa równania mają też same pierwiastki, wtedy równanie otrzymane przez dodanie lub odjęcie ich, może zastąpić jedno, którekolwiek z danych równań.

W samej rzeczy: uważmy dwa równania:
$$A = B;$$
$$C = D;$$
zawierające też same niewiadome x i y. Te pary wartości na x i y, które czynią jednocześnie $A = B$ i $C = D$, uczynią również i $A + C = B + D$. I odwrotnie: te pary wartości na x i y, które zadosyć czynią równaniu:
$$A + C = B + D,$$
i *jednemu* z równań $A = B$, lub $C = D$, zadosyć muszą czynić i drugiemu równaniu.

Równania dane, mogą być podług tego zastąpione innemi parami równań, dogodniejszemi do rozwiązania. Mianowicie: zamiast pary równań:
$$A = B \text{ i } C = D,$$
możemy użyć do rozwiązania takie pary:
$$A = B \text{ i } A + C = B + D$$
lub:
$$C = D \text{ i } A + C = B + D$$
lub:
$$A = B \text{ i } A - C = B - D$$
i t. d.

Oczywiście obie strony każdego z równań przed dodaniem lub odjęciem mogą być pomnożone lub podzielone przez jednę i tęż samę ilość, skąd możemy otrzymać skombinowane równania przekształcone w taki sposób, jaki w danym przypadku uważać będziemy za najdogodniejsze do rozwiązania. Toż samo daje się zastosować i do większej liczby równań: trzy równania mogą być zastąpione dwoma któremikolwiek z nich i trzeciem, powstałem z dodania lub odjęcia danych równań i t. d.

219. Oprócz powyżej wyłożonych trzech sposobów rozwiązywania równań z dwiema niewiadomemi, jest jeszcze czwarty sposób, zwany *sposobem Bezout'a* lub *francuskim*. Sposób ten polega na wprowadzeniu w równania mnożnika dowolnego, nieoznaczonego, to jest mogącego przyjmować *wszelkie wartości*, jakie tylko nadać mu zechcemy. Pokażemy na równaniach, które już wyżej rozwiązaliśmy użycie tegoż sposobu.

Niech więc będą dane równania do rozwiązania:
$$8x + 7y = 100,$$
$$12x - 5y = 88.$$

Pomnóżmy jedno z tych równań, np. pierwsze, przez ilość dowolną m, to jest taką, jakiej możemy nadawać takie wartości, jakie tylko chcemy. Otrzymamy:
$$8mx + 7my = 100m,$$
$$12x - 5y = 88.$$

Dodajmy tak otrzymane równania odpowiedniemi stronami; będzie:
$$8mx + 12x + 7my - 5y = 100m + 88.$$

Wyłączając z pierwszych dwóch wyrazów pierwszej strony x, a z drugich dwóch wyrazów y, za nawias, otrzymamy:
$$(8m + 12)\,x + (7m - 5)\,y = 100m + 88.$$

Równanie to bezwątpienia jest więcej złożone, aniżeli każde z równań danych; lecz ponieważ do niego wchodzi ilość dowolna m, przeto możemy ją tak wybrać, aby po podstawieniu odpowiedniej na nią wartości, jedna z niewiadomych znikła z równania, czyli została wyrugowaną. W tym celu należy tylko na m wybrać taką wartość, aby współczynnik przy tej niewiadomej, którą chcemy wyrugować, stał się równym zero. Przypuśćmy np. że chcemy znaleść wartość na x; wtedy należy z równania wyrugować y. Podstawmy na m taką wartość aby współczynnik $7m - 5$ stał się zerem. Jeżeli: $7m - 5 = 0$, to

$$7m = 5,$$

a:
$$m = \frac{5}{7}.$$

Podstawiając tę wartość na m w powyższe równanie otrzymamy:

$$\left(8 \cdot \frac{5}{7} + 12\right) x + \left(7 \cdot \frac{5}{7} - 5\right) y = 100 \cdot \frac{5}{7} + 88,$$

czyli;
$$\left(\frac{40}{7} + 12\right) x + 0 \cdot y = \frac{500}{7} + 88.$$

A że:
$$0 \cdot y = 0,$$

przeto:
$$\left(\frac{40}{7} + 12\right) x = \frac{500}{7} + 88.$$

Znosząc tutaj mianownik, będzie:

$$(40 + 84)\, x = 500 + 616,$$

czyli:
$$124x = 1116,$$

skąd:
$$x = 9.$$

Chcąc znaleść y, należy w równaniu:

$$(8m + 12)\, x + (7m - 5)\, y = 100m + 88,$$

podstawić zamiast m taką wartość, któraby uczyniła współczynnik przy x równym zero. Taką wartość znajdziemy, rozwiązując równanie:

$$8m + 12 = 0,$$

skąd:
$$m = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

Podstawiając tę wartość w powyższe równanie, będzie:

$$\left(-\frac{21}{2} - 5\right) y = -150 + 88,$$

czyli:
$$-\left(\frac{21}{2} + 5\right) y = -62;$$

albo, znosząc mianownik i wykonywając dodawanie:

$$-31y = -124.$$

Lecz w tem równaniu możemy znaki w obu stronach zmienić na przeciwne, gdyż to jest równoznaczne z przeniesieniem wyrazu $-31y$ z pierwszej strony na drugą, a wyrazu -124 z drugiej strony na pierwszą i zmienieniem następnie porządku stron równania; będzie:

$$31y = 124;$$

skąd:
$$y = 4.$$

220. Moglibyśmy jeszcze każde szczególne zadanie rozwiązać za pomocą ogólnych wzorów, pokazujących wartości na niewiadome z dwóch równań takich, w których współczynniki tychże niewiadomych i ilości wiadome są oznaczone głoskami. Równania dwa, z dwiema niewiadomemi mogą być w ogólności przedstawione w tej postaci:

$$a_1x + b_1y = k_1,$$
$$a_2x + b_2y = k_2;$$

gdzie a_1, a_2, b_1, b_2, k_1 i k_2 oznaczają pewne dane liczby, różne w każdym szczególnym przypadku. Aby z tych równań znaleść wartość na x, wyrugujemy z nich y. W tym celu pomnóżmy pierwsze przez b_2, drugie zaś przez b_1; otrzymamy:

$$a_1b_2x + b_1b_2y = k_1b_2,$$
$$a_2b_1x + b_2b_1y = k_2b_1;$$

Odjąwszy odpowiednie strony tych dwóch równań wypadnie:

$$a_1b_2x - a_2b_1x = k_1b_2 - k_2b_1;$$

wyłączając na pierwszej stronie x za nawias, będzie:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x = k_1b_2 - k_2b_1;$$

skąd:
$$x = \frac{k_1b_2 - k_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Podobnież: rugując z tych równań x, otrzymamy wartość na y, która będzie taką:

$$y = \frac{a_1k_2 - a_2k_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Jakkolwiek, na pierwszy rzut oka, te wartości na x i y wydają się dosyć złożonemi, wszakże nietrudno je sobie w każdym przypadku przypomnieć, przyjrzawszy się tylko sposobowi, w jaki są one z współczynników i ilości wiadomych utworzone. W samej rzeczy: zwróćmy uwagę najprzód na to, że obie wartości przedstawiają się w postaci ułamków, mających mianownik wspólny i łatwy do zapamiętania $a_1b_2 - a_2b_1$, złożony tylko z współczynników przy x i y. Powtóre: licznik wartości na x otrzyma się z mianownika wspólnego, przez podstawienie w nim zamiast współczynników a_1 i a_2 przy x w dwóch danych równaniach, odpowiednio drugich stron tychże równań k_1 i k_2. Podobnież i licznik wartości na y jest w ten sam sposób utworzony z mianownika, to jest przez podstawienie w nim zamiast współczynników przy y w obu równaniach b_1 i b_2, odpowiednio drugich stron k_1 i k_2.

Skoro są znalezione ogólne wzory, wyrażające wartości na niewiadome z dwóch równań ogólnych stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi, wtedy możemy każdy szczególny przypadek tychże równań, rozwiązać przez proste podstawienie odpowiednich wartości w powyższe wzory. Tak np. weźmy przykład już rozwiązywany poprzednio kilkakrotnie. Dane równania są:

$$8x + 7y = 100,$$
$$12x - 5y = 88.$$

Tutaj: $a_1 = 8$; $b_1 = 7$; $k_1 = 100$; $a_2 = 12$; $b_2 = -5$; $k_2 = 88$. Podstawiając te wartości w znalezione wyżej wzory, będzie:

$$x = \frac{100 \times -5 - 88 \times 7}{8 \times -5 - 12 \times 7};$$

$$y = \frac{8 \times 88 - 12 \times 100}{8 \times -5 - 12 \times 7};$$

skąd:

$$x = \frac{-500 - 616}{-40 - 84} = \frac{-1116}{-124} = 9;$$

i:
$$y = \frac{704 - 1200}{-40 - 84} = \frac{-496}{-124};$$

$$y = 4.$$

PRZYKŁADY XXIV.

1. $3x - 4y = 2,\quad 7x - 9y = 7.$
2. $10x + 9y = 290,\quad 12x - 11y = 130.$
3. $3x - 4y = 18,\quad 3x + 2y = 0.$
4. $4x - \frac{y}{2} = 11,\quad 2x - 3y = 0.$
5. $\frac{x+y}{3} + x = 15,\quad \frac{x-y}{5} + y = 6.$
6. $\frac{2x+3y}{5} = 10 - \frac{y}{3},\quad \frac{4y-3x}{6} = \frac{3x}{4} + 1.$
7. $2\,(2x + 3y) = 3\,(2x - 3y) + 10,$
   $4x - 3y = 4\,(6y - 2x) + 3.$
8. $3x + 9y = 2{,}4.\quad 0{,}21x - 0{,}06y = 0{,}03.$
9. $\frac{9}{x} - \frac{4}{y} = 1,\quad \frac{18}{x} + \frac{20}{y} = 16.$
10. $x - 4y = 7,\quad \frac{x}{3y} + \frac{11}{10} = \frac{4x-5y}{5y}.$
11. $\frac{x+1}{y-1} - \frac{x-1}{y} = \frac{6}{y},\quad x - y = 1.$

12. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2, \quad bx - ay = 0.$

13. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c, \quad \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0.$

14. $a(x + y) + b(x - y) = 1, \quad a(x - y) + b(x + y) = 1.$

15. $\frac{13}{x + 2y + 3} = \frac{3}{4x - 5y + 6},$

$\frac{3}{6x - 5y + 4} = \frac{19}{3x + 2y + 1}.$

16. $ax = by + \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad (a - b)\,x = (a + b)\,y.$

17. $\frac{x + y - 1}{x - y + 1} = a, \quad \frac{y - x + 1}{x - y + 1} = ab.$

XXV.

Równania jednoczesne stopnia pierwszego, zawierające więcej niż dwie niewiadome.

221. Gdy są dane trzy równania, zawierające trzy niewiadome, wtedy z dwóch tych równań możemy wyprowadzić jedno, zawierające tylko dwie niewiadome, za pomocą sposobów, podanych w poprzednim rozdziale. Następnie z trzeciego z danych równań i jednego z dwóch pierwszych, możemy otrzymać nowe równanie, zawierające tylko dwie też same niewiadome. Tym sposobem mieć będziemy dwa równania zawierające dwie niewiadome, których wartości mogą być oznaczone sposobami podanymi w poprzednim rozdziale. Podstawiając tak znalezione wartości w jedno z danych równań, znajdziemy wartość i trzeciej niewiadomej.

222. Rozwiązać równania:

$$7x + 3y - 2z = 16 \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$2x + 5y + 3z = 39 \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$5x - y + 5z = 31 \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Aby można było łatwo wskazywać te równania, o których mowa, oznaczamy je liczbami (1), (2), (3); i równania w dalszym ciągu otrzymywane oznaczać będziemy w podobny sposób.

Pomnóżmy (1) równanie przez 3, (2) przez 2; otrzymamy:

$$21x + 9y - 6z = 48,$$

$$4x + 10y + 6z = 78;$$

dodając te równania, będzie:

$$25x + 19y = 126 \quad . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Pomnóżmy następnie (1) przez 5, i (3) przez 2, będzie:

$$35x + 15y - 10z = 80,$$

$$10x - 2y + 10z = 62;$$

przez dodanie zaś:

$$45x + 13y = 142 \quad . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Należy nam teraz znaleść wartości x i y z równań (4) i (5).

Pomnóżmy (4) przez 9, a (5) przez 5; będzie:

$$225x + 171y = 1134,$$

$$225x + 65y = 710;$$

odejmując te dwa równania, otrzymamy:

$$106y = 424;$$

skąd: $\qquad y = 4.$

Podstawmy znalezioną wartość na y w równanie (4); mieć będziemy:

$$25x + 76 = 126;$$

skąd: $\qquad 25x = 126 - 76 = 50,$

a następnie: $\qquad x = 2.$

Podstawiając nakoniec wartości na x i na y w równanie (1), będzie:

$$14 + 12 - 2z = 16,$$

skąd: $10 = 2z,$

i następnie: $z = 5.$

223. Rozwiązać:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{5}{x} + \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = 24 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{7}{x} - \frac{8}{y} + \frac{9}{z} = 14 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Pomnóżmy równanie (1) przez 2, i dodajmy wypadek otrzymany do równania (2); — znajdziemy:

$$\frac{2}{x} + \frac{4}{y} - \frac{6}{z} + \frac{5}{x} + \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = 2 + 24$$

czyli: $$\frac{7}{x} + \frac{8}{y} = 26 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Pomnóżmy równanie (1) przez 3 i dodajmy otrzymany iloczyn do równania (3); będzie:

$$\frac{3}{x} + \frac{6}{y} - \frac{9}{z} + \frac{7}{x} - \frac{8}{y} + \frac{9}{z} = 3 + 14,$$

czyli: $$\frac{10}{x} - \frac{2}{y} = 17 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Pomnóżmy (5) przez 4 i dodajmy otrzymane równanie do równania (4); — będzie:

$$\frac{40}{x} - \frac{8}{y} + \frac{7}{x} + \frac{8}{y} = 68 + 26;$$

czyli: $$\frac{47}{x} = 94;$$

skąd: $47 = 94x,$

i nakoniec: $$x = \frac{47}{94} = \frac{1}{2}.$$

Podstawiając tak znalezioną wartość na x w równanie (5), będzie: $$20 - \frac{2}{y} = 17,$$

skąd: $$\frac{2}{y} = 20 - 17 = 3,$$

a samo: $$y = \frac{2}{3}.$$

Podstawmy nareszcie te wartości na x i y w równanie (1);— otrzymamy: $$2 + 3 - \frac{3}{z} = 1,$$

czyli: $$\frac{3}{z} = 4,$$

skąd: $$z = \frac{3}{4}.$$

224. Rozwiązać równania:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 3 \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 5 \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 4 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Odejmijmy równanie (1) od (2); — będzie:

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 5 - 3,$$

czyli: $$\frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Odejmując (4) od (3), otrzymamy:

$$\frac{2x}{a} = 2;$$

czyli: $\frac{x}{a} = 1;$ skąd: $x = a.$

Dodając równanie (4) do równania (3), otrzymamy:

$$\frac{2z}{c} = 6,$$

skąd: $$\frac{z}{c} = 3,$$

a następnie: $$z = 3c.$$

Przez podstawienie wartości na x w równanie (1) znajdziemy nakoniec: $y = 2b$.

225. W podobny sposób możemy postępować, jeżeli liczba równań i ilości niewiadomych jest większą od trzech.

226. Gdybyśmy chcieli rozwiązać trzy równania z *trzema* niewiadomemi *sposobem Bezout'a* (§ 219) wtedy należałoby wprowadzić do danych równań *dwa* mnożniki nieoznaczone. Następujący przykład najlepiej objaśni sposób postępowania:

Przypuśćmy, że chcemy rozwiązać równania:

$$5x + 2y + 3z = 28,$$
$$8x - 3y + 2z = 15,$$
$$6x - y - 2z = 1.$$

W tym celu pomnóżmy pierwsze z nich przez czynnik nieoznaczony m, — drugie przez drugi czynnik nieoznaczony n, a trzecie zostawmy bez zmiany. Będzie:

$$5mx + 2my + 3mz = 28m,$$
$$8nx - 3ny + 2nz = 15n,$$
$$6x - y - 2z = 1.$$

Dodajmy teraz te trzy równania, wyłączając jednocześnie x, y i z za nawiasy z tych wyrazów, do których one wchodzą jako wspólne czynniki. Otrzymamy równanie:

$$(5m + 8n + 6)\,x + (2m - 3n - 1)\,y +$$
$$+ (3m + 2n - 2)\,z = 28m + 15n + 1 \quad . \quad . \quad . (1)$$

Do równania tego wchodzą oprócz wszystkich trzech niewiadomych, jeszcze dwie ilości dowolne m, n. Ponieważ te ostatnie mogą przyjmować wszystkie wartości, jakie tylko uważamy za stosowne im nadać, przeto możemy w ich miejsce podstawić takie wartości, przy których *dwa* współczynniki przy *dwóch* niewiadomych w równaniu (1) stałyby się zerami.

Podstawiając więc zamiast m i n stosownie dobrane wartości w równanie (1), otrzymamy z tegoż równania, równanie zawierające tylko jednę niewiadomą, z którego taż niewiadoma może być następnie oznaczoną. I tak przypuśćmy, że chcemy najprzód znaleść wartość na x. Wtedy za m i n podstawiamy w równaniu (1) takie wartości, przy których współczynniki przy y i z stałyby się zerami, to jest przy których byłoby:

$$2m - 3n - 1 = 0,$$
$$3m + 2n - 2 = 0.$$

Te wartości otrzymują się przez rozwiązanie równań:

$$2m - 3n = 1,$$
$$3m + 2n = 2.$$

Mnożąc pierwsze z nich przez 2 a drugie przez 3, wypada:

$$4m - 6n = 2,$$
$$9m + 6n = 6;$$

dodając je, otrzymamy:

$$13m = 8,$$

skąd: $$m = \frac{8}{13}$$

Podobnie znajdziemy, że:

$$n = \frac{1}{13}.$$

Podstawiając te wartości na m i na n w równanie (1) znajdziemy:

$$\left(5 \times \frac{8}{13} + 8 \times \frac{1}{13} + 6\right)x + 0\,.\,y + 0\,.\,z =$$
$$= 28 \times \frac{8}{13} + 15 \times \frac{1}{13} + 1,$$

czyli: $$\left(\frac{40}{13} + \frac{8}{13} + 6\right)x = \frac{224}{13} + \frac{15}{13} + 1.$$

Znosząc tutaj mianownik 13 będzie:

$$(40 + 8 + 78)\,x = 224 + 15 + 13,$$

czyli: $126x = 252;$

skąd nakoniec $x = \frac{252}{126} = 2.$

Chcąc znaleść wartość na y, należy zamiast m i n podstawić w równanie (1) takie wartości, przy których byłoby:

$$5m + 8n + 6 = 0.$$
$$3m + 2n - 2 = 0.$$

Postępując podobnie jak to było pokazane przy wynajdywaniu wartości na x, znajdziemy, że:

$$y = 3.$$

Nakoniec na z znajdziemy wartość następną:

$$z = 4.$$

Gdyby było danych do rozwiązania cztery równania z czterema niewiadomemi, wtedy należałoby wprowadzić do tychże równań trzy ilości dowolne; i t. d.

PRZYKŁADY XXV.

1. $x + 3y + 2z = 11,$
$2x + y + 3z = 14,$
$3x + 2y + z = 11.$

2. $5x - 6y + 4z = 15$
$7x + 4y - 3z = 19$
$2x + y + 6z = 46.$

3. $3x - y + z = 17,$
$5x + 3y - 2z = 10,$
$7x + 4y - 5z = 3.$

4. $x + y + z = 5,$
$3x - 5y + 7z = 75,$
$9x - 11z + 10 = 0.$

5. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6},$
$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3\frac{5}{6},$
$\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{4}{z}.$

6. $y + z = a$ [1])
$z + x = b$
$x + y = c$

[1]) Równania te i *podobne* do nich najprościej rozwiązują się przez dodanie ich wszystkich, podzielenie sumy przez współczynnik wspólny przy wszystkich niewiadomych i następnie odjęcie kolejne

7. $y + z - x = a,$
$z + x - y = b,$
$x + y - z = c.$

8. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$
$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} + \frac{z}{b} = 1,$
$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1.$

9. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 3,$
$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = 1,$
$\frac{2a}{x} - \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = 0.$

10. $v + x + y + z = 14,$
$2v + x = 2y + z - 2;$
$3v - x + 2y + 2z = 19.$
$\frac{v}{3} + \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 4.$

11. $x + y = 16.$
$y + z = 28,$
$z + x = 22.$

12. $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b.$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c.$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a.$

każdego z danych równań od równania otrzymanego z poprzednich działań. W uważanych równaniach np. będzie z dodania ich:

$$2x + 2y + 2z = a + b + c,$$

następnie: $x + y + z = \frac{a+b+c}{2},$

Odejmując pierwsze równanie:

$$y + z = a$$

od powyższego, otrzymamy:

$$x = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}, \text{ i t. d.}$$

13. $xy + yz + zy = 9xyz,$ [1])
$yz + 2zx - 3xy = -4xyz,$
$3yz - 2zx + xy = 4xyz.$

14. $x + y + z = 3a + b + c,$
$x + y + t = -a + 3b + c,$
$x - z - t = a + b - c,$
$y + z - t = 3a - b - c.$

XXVI.

Zagadnienia, prowadzące do równań jednoczesnych stopnia pierwszego, zawierających więcej niż jednę niewiadomą.

227. Rozwiążemy teraz kilka zagadnień, prowadzących do równań jednoczesnych stopnia pierwszego, o więcej niż jednej niewiadomej.

Znaleść ułamek, który staje się równym $\frac{2}{3}$, gdy licznik zostanie powiększonym o 2, a równym $\frac{4}{7}$, gdy mianownik zostanie powiększonym o 4.

Niech x oznacza licznik, a y mianownik szukanego ułamka; wtedy z założenia mamy:

$$\frac{x+2}{y} = \frac{2}{3}; \quad \frac{x}{y+4} = \frac{4}{7}.$$

Znosząc mianowniki, będzie:

$$3x - 2y = -6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$7x - 4y = 16 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

[1]) Należy najprzód każde z tych równań podzielić przez xyz i t. d.

Mnożąc (1) przez 2 i odejmując następnie od (2), otrzymamy:

$$7x - 4y - 6x + 4y = 16 + 12,$$

czyli: $\quad x = 28.$

Podstawiając wartość na x w (1) znajdziemy:

$$84 - 2y = -6,$$

skąd: $\quad 2y = 90,$

i nakoniec: $\quad y = 45.$

Szukany zatem ułamek jest: $\frac{28}{45}$.

228. Pewna suma pieniędzy była podzielona równo pomiędzy pewną liczbę osób; gdyby osób było o sześć więcej, wtedy każda otrzymałaby o dwa ruble mniej, aniżeli teraz rzeczywiście dostała; — gdyby znowuż osób było o trzy mniej, wtedy każda otrzymałaby o dwa ruble więcej. Znaleść ile było osób i ile każda otrzymała?

Niech x oznacza liczbę osób, a y liczbę rubli, jaką każda otrzymała. Wtedy xy będzie liczbą rubli, która została podzieloną. Z warunków zadania wypada, że:

$$(x + 6)(y - 2) = xy \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$
$$(x - 3)(y + 2) = xy \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Z równania (1) otrzymujemy:

$$xy + 6y - 2x - 12 = xy$$

skąd: $\quad 6y - 2x = 12 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$

Z równania (2) będzie:

$$xy + 2x - 3y - 6 = xy;$$

zatem: $\quad 2x - 3y = 6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$

Z równań (3) i (4) otrzymamy przez dodanie:

$$3y = 18,$$

skąd: $\quad y = 6.$

Podstawiając wartość na y w (4), będzie:

$$2x - 18 = 6,$$

przeto: $2x = 24$

i nakoniec: $x = 12$.

Więc było 12 osób i każda dostała po 6 rubli.

229. Pewna liczba dwucyfrowa jest równa pięć razy wziętej sumie jej cyfr; dodając do tej liczby 9 otrzymamy nową liczbę dwucyfrową, złożoną z tych samych cyfr, ale napisanych w odwrotnym porządku. Znaleść tę liczbę.

Niech x oznacza cyfrę, stojącą na miejscu dziesiątków, a y cyfrę, stojącą na miejscu jedności. Wtedy sama liczba będzie $10x + y$; i podług założenia jest ona pięć razy większą od sumy jej cyfr, przeto:

$$10x + y = 5(x + y) \quad \ldots \quad (1).$$

Jeżeli, dalej, do tejże liczby dodamy 9, wtedy otrzymamy liczbę, złożoną z tychże samych cyfr, ale napisanych w odwrotnym porządku, to jest $10y + x$, więc:

$$10x + y + 9 = 10y + x \quad \ldots \quad (2).$$

Z równania (1) znajdujemy:

$$5x = 4y \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

z równania zaś (2) otrzymamy:

$$9x + 9 = 9y,$$

czyli: $x + 1 = y$.

Podstawiając to znaczenie na y w równanie (3), znajdziemy:

$$5x = 4x + 4,$$

skąd: $x = 4$.

Z równania zaś (3) otrzymamy:

$$y = 5.$$

Szukana zatem liczba jest 45.

230. Pociąg kolei żelaznej, po godzinnej podróży, został w drodze wskutek wypadku, zatrzymany przez 24 minuty, poczem wyruszywszy z prędkością o $\frac{1}{5}$ większą od poprzedniej, przybył na miejsce przeznaczenia o 15 minut za późno. Gdyby wypadek zdarzył się o 5 wiorst dalej, wtedy pociąg opóźniłby się jeszcze o 2 minuty więcej. Znaleść początkową prędkość pociągu i odległość, jaką pociąg przejechał.

Oznaczmy przez $5x$ liczbę wiorst, jaką pociąg początkowo przejeżdżał na godzinę, a przez y oznaczmy liczbę wiorst, zawartą w całej odległości, jaką całkowicie przebył. Wtedy $y—5x$ oznaczać będzie tę odległość w wiorstach, jaką pociąg jeszcze ma przejechać po zatrzymaniu. Tę odległość pociąg przebyłby w $\frac{y-5x}{5x}$ godzin, jadąc z prędkością początkową; z prędkością zaś powiększoną, pociąg przebędzie ją w $\frac{y-5x}{6x}$ godzin. Ponieważ pociąg stał przez minut 24, a spóźnił się tylko o 15 minut, przeto pozostała część drogi została przebytą w czasie o 9 minut krótszym od tego, w jakim byłaby przebytą, gdyby pociąg prędkości nie powiększył. A że 9 minut stanowi $\frac{9}{60}$ godziny, przeto:

$$\frac{y-5x}{6x} = \frac{y-5x}{5x} - \frac{9}{60} \quad . \quad . \quad (1)$$

Gdyby wypadek zaszedł o 5 wiorst dalej, wtedy pociąg miałby do przebycia jeszcze $y - 5x - 5$ wiorst. Wtedy mielibyśmy:

$$\frac{y-5x-5}{6x} = \frac{y-5x-5}{5x} - \frac{7}{60} \quad . \quad . \quad (2)$$

Odejmijmy równanie (2) od (1); będzie:

$$\frac{5}{6x} = \frac{5}{5x} - \frac{2}{60},$$

skąd:

$$50 = 60 - 2x;$$

a następnie: $2x = 10$, i samo $x = 5$.

Podstawiając tę wartość na x w równanie (1) znajdziemy, przez rozwiązanie tegoż równania:

$$y = 47\frac{1}{2}.$$

231. Trzy osoby A, B i C mogą razem wykonać pewną robotę w 30 dniach; A i B wykonaliby razem tęż robotę w 32 dniach, zaś B i C wykonaliby ją razem pracując, w 120 dniach. Znaleść w jakim czasie mogłaby wykonać tęż samę robotę każda z tych osób, pracując oddzielnie?

Oznaczmy głoską x liczbę dni, przez którą sama osoba A wykonałaby tę robotę, głoską y liczbę dni, przez którą wykonałaby ją osoba B, i głoską z, liczbę dni, przez którą sama osoba C mogłaby ją wykonać.

Wtedy będzie:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{32} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{120} \quad . \; . \; . \quad (3).$$

Odejmując równanie (2) od równania (1), otrzymamy:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{30}-\frac{1}{32}=\frac{1}{480}.$$

Odejmując dalej równanie (3) od (1), otrzymamy:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{30}-\frac{1}{120}=\frac{1}{40}.$$

Przeto $x=40$, a $z=480$; przez podstawienie zaś tych wartości w którekolwiek z danych równań, znajdziemy, że $y=160$.

232. Należy tu zwrócić uwagę, że dane zadanie może być często rozwiązane rozmaitymi sposobami, z użyciem większej lub mniejszej liczby głosek, służących do przedstawienia ilości niewiadomych. Aby to objaśnić przykładem, weźmy bardzo proste zagadnienie: Znaleść takie dwie liczby, aby ich suma była równą 100, i aby jedna z nich stanowiła dwie trzecie części drugiej.

Aby je rozwiązać możemy tak rozumować: Niech x oznacza większą a y mniejszą liczbę; wtedy mieć będziemy:

$$y=\frac{2x}{3}; \quad x+y=100.$$

Albo też możemy postępować w taki sposób: Jeżeli przez x oznaczymy większą liczbę, wtedy $100-x$ oznaczać będzie mniejszą; zatem:

$$100-x=\frac{2x}{3}.$$

Albo wreszcie możemy rozumować i w ten sposób: Oznaczamy przez $3x$ liczbę większą; wtedy $2x$ oznaczać będzie liczbę mniejszą, i równanie do rozwiązania będzie:

$$3x+2x=100.$$

Rozwiązując w zupełności zadanie którymkolwiek z tych sposobów, znajdziemy, że szukane liczby są 60 i 40.

Z tego powodu czytelnik będzie prawdopodobnie w stanie rozwiązać niektóre z zadań, podanych na końcu tego rozdziału, używając tylko jednej głoski do oznaczenia ilości niewiadomej; jak również z drugiej strony, może mu się wydać naturalniejszem, użycie do rozwiązania niektórych zadań rozdziału XXIII dwóch głosek, zamiast jednej. Jako ogólne prawidło można powiedzieć, że użycie większej liczby niewiadomych, czyni rachunki dłuższymi, lecz za to ułatwia ułożenie równań i daje możność łatwiejszego śledzenia biegu roboty. Z tego to właśnie powodu jest dla początkujących korzystniejszem i odpowiedniejszem.

Dla uczącego się zalecamy, jako dobre ćwiczenie, rozwiązanie zagadnienia § 207 za pomocą użycia czterech głosek do oznaczenia czterech niewiadomych, tam wchodzących.

PRZYKŁADY XXVI.

1. Znaleść dwie liczby, mające takie własności: połowa pierwszej liczby dodana do trzeciej części drugiej liczby sta-

nowi sumę równą 32; i nadto: czwarta część pierwszej liczby dodana do piątej części drugiej stanowi 18.

2. Kij od wędki składa się z dwóch części: stosunek długości górnej części do długości dolnej części jest równy stosunkowi 5 : 7; 9 razy zaś wzięta górna część, wraz z 13 razy wziętą dolną częścią, przewyższa 11 razy wziętą długość całego kija o 36 cali. Znaleść długość obu części kija?

3. Dwaj chłopcy mieli po pewnej liczbie orzechów. Jeden z nich rzekł do drugiego: daj mi 5 twoich orzechów, to mieć będę trzy razy tyle co ty. Nie, odpowiedział drugi, daj mi ty raczej 2 orzechy, to mieć będę pięć razy więcej, niż ty. Ile miał każdy? Toż samo zadanie wyrazić i rozwiązać w sposób ogólny.

4. Pewna liczba słupów jest ustawiona na linii prostej, w równych od siebie odległościach Jeżeli do podwojonej liczby słupów dodamy odległość dwóch po sobie następujących słupów, wyrażoną w stopach, otrzymamy na sumę 68. Jeżeli od cztery razy wziętej odległości pomiędzy dwoma po sobie następującymi słupami odejmiemy połowę liczby słupów, otrzymamy na resztę 68. Znaleść odległość pomiędzy skrajnymi słupami.

5. Podłoga prostokątna jest takich wymiarów, że gdyby jej szerokość powiększyć o dwie stopy a długość o trzy stopy, wtedy powierzchnia całej podłogi powiększyłaby się o 64 stopy kwadratowe; gdyby zaś szerokość jej powiększyła się o trzy stopy a długość o dwie, wtedy jej powierzchnia powiększyłaby się o 68 stóp kwadratowych. Znaleść długość i szerokość podłogi?

6. Dwie liczby dodane do siebie dają na sumę s, podzielone przez siebie — dają na iloraz q i na resztę r. Znaleść te liczby.

7. Kapitał, oddany na pewien procent, zamienił się po upływie 8 lat wraz z procentem na sumę 6486 rb. Tenże sam kapitał, gdyby był oddany na procent, przy stopie procentu o 1 większej, zamieniłby się po upływie lat 5 na sumę $6051\frac{1}{4}$ rb. Znaleść kapitał i stopę procentu?

8. A i B są to dwa miasta, leżące nad brzegiem tej samej rzeki, w odległości 24 wiorst od siebie. Podróżny, który wyruszył z A, przebył odległość do B w 7 godzin, płynąc połowę drogi łódką w górę rzeki, i drugą połowę idąc pieszo. Z powrotem najprzód przeszedł pierwszą połowę drogi pieszo z prędkością, wynoszącą tylko trzy czwarte tej prędkości, z jaką szedł poprzednio ku B, a drugą połowę przepłynął łódką w dół rzeki z prędkością dwa razy większą od prędkości, z jaką płynął w górę rzeki, i tym sposobem przebył całą odległość w 6 godzin. Znaleść z jaką prędkością płynął i szedł początkowo od A do B.

9. Dwa pociągi kolei żelaznej, jeden długi na 32 metry, drugi zaś na 28 metrów, jadą po dwóch torach równoległych. Jeżeli jadą w przeciwne strony, wtedy potrzebują $1\frac{1}{2}$ sekundy na to, aby się minąć; jeżeli zaś jadą w tym samym kierunku, wtedy prędszy potrzebuje 6 sekund na to, aby wyminąć wolniejszy. Znaleść z jakiemi prędkościami te pociągi jadą.

10. Ma ktoś dwa gatunki srebra: jeżeli zmiesza 10 kilogramów pierwszego gatunku z 5 kilogramami drugiego, wtedy otrzyma srebro próby $687\frac{1}{2}$ [1]) jeżeli zaś zmiesza $7\frac{1}{2}$ kilogramów pierwszego gatunku z $1\frac{1}{2}$ kilogramem drugiego gatunku, wtedy otrzyma srebro 625 próby. Jakiej próby są te dwa gatunki srebra?

11. Trzy miasta A, B i C leżą w trzech wierzchołkach trójkąta. Z miasta A do miasta C przez miasto B jest 82

[1]) Próba tak wyrażona odnosi się do układu metrycznego miar i oznacza, że w 1 kilogramie, czyli 1000 gramach aliażu znajduje się $687\frac{1}{2}$ gramów czystego srebra.

wiorsty; — z B do A przez C — 97 wiorst, i z miasta C do B przez A — 89 wiorst. Znaleść odległości od siebie tych trzech miast?

12. Czterej gracze A, B, C i D grali z sobą cztery partye wista. Po pierwszej partyi wygrali A, B i C — każdy po tyle ile miał przy sobie; po drugiej partyi wygrali A, B i D znowuż tyle, ile każdy z nich teraz miał przy sobie. Tak samo po trzeciej partyi wygrali A, C i D; a po czwartej B, C i D. Okazało się, że po tem wszystkiem każdy z nich miał po 6 rb. 40 kop. Ileż każdy z nich miał, siadając do gry?

13. Trzy osoby A, B i C mogą wypić beczkę piwa w 15 dni; A i B razem wypijają cztery trzecie tego, co wypija C; Osoba C zaś wypija dwa razy tyle co A. Znaleść w jakim przeciągu czasu każda osoba sama mogłaby wypić beczkę piwa?

14. Dwa ciała znajdują się w odległości d metrów. Jeżeli poruszać się będą ruchem jednostajnym *ku* sobie, wtedy spotkają się po m sekundach. Jeżeli zaś poruszać się będą z temiż samemi prędkościami jedno za drugiem (w jednę stronę), wtedy spotkają się po n sekundach. Znaleść prędkości, z jakiemi się poruszają?

15. Znaleść ułamek, który stałby się równym $\frac{1}{3}$, gdybyśmy jego licznik powiększyli o jedność, i który stałby się równym $\frac{1}{4}$ gdybyśmy podobnie postąpili z mianownikiem.

16. Dług 1230 rb. został zapłacony papierkami 25 rublowemi i 10 rublowemi; pierwszych było o 17 więcej niż drugich. Ileż było papierków 25, a ile 10 rublowych?

17. Dwóch kupców miało razem 10000 rb.; kapitał jednego i drugiego procentuje się jednakowo (to jest zysk obu od sta na rok, jest jednakowy). Pierwszy z nich po upływie trzech lat ma kapitału wraz z procentem 9900 rb.; drugi zaś już po upływie dwóch lat ma kapitału wraz z procentem 9900 rb. Pytanie: Jakiż był początkowy kapitał każdego z tych kupców?

18. W liczbie dwucyfrowej cyfra, stojąca na miejscu dziesiątków jest o 2 większą od cyfry, stojącej na miejscu jedności; jeżeli zaś cyfry odwrócimy, wtedy nowa liczba będzie w takim stosunku do liczby danej, w jakim jest 7 do 4. Znaleść tę liczbę.

19. Człowiek, który idąc zwykłym krokiem, przechodzi na godzinę $3\frac{1}{2}$ wiorsty, wyszedł na przechadzkę; i, uszedłszy pewną odległość, przypomniał sobie, że miał załatwić w domu pilny interes. Wraca więc, biegnąc z początku z prędkością 7 wiorst na godzinę, a następnie pozostałą część drogi przechodzi zwykłym swoim krokiem w ciągu pięciu minut. Pokazało się, że od chwili jego wyjścia z domu aż do powrotu upłynęło 25 minut. Pytanie: ileż wiorst on przebiegł.

20. Zbiornik zawierający 1200 garncy zostaje napełniony wodą, wpływającą do niego trzema rurami razem A, B i C w ciągu 24 minut. Rura A potrzebowałaby sama o 30 minut więcej do napełnienia zbiornika, aniżeli rura C; a przez rurę C wpływa o 10 garncy mniej na minutę, aniżeli w tym samym czasie przez rury A i B razem. Znaleść, w jakim czasie woda mogłaby napełnić zbiornik przez każdą rurę oddzielnie.

21. Suma cyfr stanowiących pewną liczbę trzycyfrową równa się 9. Cyfra, stojąca na pierwszem miejscu z lewej strony równa się ósmej części liczby, powstałej z dwóch pozostałych cyfr; cyfra zaś stojąca na pierwszem miejscu z prawej strony, równa się także ósmej części liczby, powstałej z dwóch pozostałych cyfr. Znaleść tę liczbę.

22. Dwaj cykliści jadą z prędkością jednostajną po torze okrągłym, którego długość wynosi 500 metrów; jeden

z nich mija drugiego co 5 minut. Następnie jeden cyklista zaczyna jeździć w kierunku przeciwnym, nie zmieniając szybkości, i spotyka się z drugim co 24 sekundy. Jakie są prędkości obu cyklistów, wyrażone w kilometrach na godzinę?

23. Pewna suma pieniędzy została rozdzieloną pomiędzy osoby A, B i C w ten sposób, że dział osoby A przewyższał cztery siódme części sumy działów osób B i C o 30 rb.; dział osoby B przewyższał trzy ósme części sumy działów osób C i A także o 30 rb., i nakoniec dział osoby C przewyższał dwie dziewiąte części sumy działów osób A i B również o 30 rb. Znaleść ile każda z tych osób dostała?

24. A i B pracując razem mogą zarobić 40 rb. w ciągu dni 6; A i C pracując razem przez dni 9, zarabiają 54 rb.; i nakoniec B i C mogą razem zarobić 80 rb. w 15 dni. Znaleść ile każda z tych osób zarabia dziennie.

25. A i B mogą wykonać pewną robotę, pracując razem, w ciągu dni 48; A i C toż samo mogą wykonać w 30 dni; B zaś i C w $26\frac{2}{3}$ dnia. W ileż dni mogłaby wykonać tęż samą pracę każda z tych osób pracując sama?

26. Pewna liczba trzycyfrowa ma następujące własności: 1-sze jest ona równą 48 razy wziętej sumie cyfr; 2-re jeżeli od niej odejmiemy 198, wtedy otrzymamy liczbę, złożoną z tychże samych cyfr, lecz w odwrotnym porządku; 3-cie suma skrajnych cyfr jest równą podwojonej cyfrze średniej. Znaleść tę liczbę.

27. Jubiler stopił dwie sztaby srebra, ważące razem 60 kilogramów, i otrzymał srebro $812\frac{1}{2}$ próby. Znaleść ile ważyła każda z tych sztab, jeżeli wiemy, że w pierwszej na na każde 9 części srebra była 1 część miedzi, a w drugiej na każde 3 części srebra była 1 część miedzi?

XXVII.

Nierówności stopnia pierwszego.

233. *Liczbę a nazywamy większą aniżeli b, jeżeli różnica a — b jest dodatnia, zaś mniejszą od b, jeżeli ta różnica jest ujemna.*

Pierwszy z tych przypadków wyrażamy za pomocą wzoru:

$$a > b,$$

drugi za pomocą wzoru:

$$a < b.$$

Będzie więc $8 > 5$, ponieważ $8 - 5 = 3$ jest dodatnie; podobnie $3 < 4$, gdyż $3 - 4 = -1$ jest ujemne.

Określenie to jest zgodne z tem, co wiemy z arytmetyki o liczbach dodatnich, ale pozwala nam ono także oznaczyć, która z dwóch liczb ujemnych jest większa, która mniejsza. Będzie np.:

$$-3 > -5,$$

ponieważ różnica $-3-(-5) = -3+5 = 2$ jest dodatnia. Podobnie znajdziemy: $2 > -3$, $-5 < 0$ i t. d.

Z powyższego widać, że jeżeli $a > b$, to $b < a$, bo jeżeli różnica $a - b$ jest dodatnia, to $b - a$ musi być ujemne.

Wszystkie liczby dodatnie są większe od liczb ujemnych; 0 jest mniejsze od każdej liczby dodatniej, ale większe od każdej liczby ujemnej.

Nazwijmy *wartością bezwzględną* danej liczby, dodatniej czy ujemnej, liczbę, jaką otrzymamy, opuszczając znak w liczbie danej; tak np. 7 będzie wartością bezwzględną zarówno dla $+7$ jak i -7. Otrzymamy wtedy następującą zasadę:

Jeżeli a i b są liczbami ujemnemi, to $a > b$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli wartość bezwzględna liczby a jest mniejsza, aniżeli wartość bezwzględna liczby b.

W samej rzeczy, niech będą a' i b' wartości bezwzględne liczb a i b, t. j.:

$$a = -a', \quad b = -b'.$$

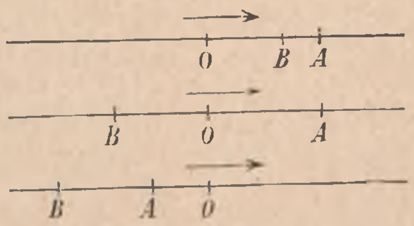
Jeżeli $a > b$, to $a - b > 0$, czyli:

$$-a' - (-b') > 0, \quad -a' + b' > 0$$

$$b' - a' > 0,$$

a zatem $a' < b'$; w podobny sposób można dowieść, że jeżeli $a' < b'$, to $a > b$.

234. Określenie podane w § 233 można objaśnić za pomocą następującego rysunku:



Na linii prostej obierzmy dowolnie punkt 0 i kierunek dodatni przyjmijmy od strony lewej ku prawej. Uczyńmy $0A = a$ i $0B = b$; jeżeli $a > b$, to punkt A będzie z prawej strony punktu B, jakiekolwiek znaki będą miały liczby a i b. Rysunek załączony przedstawia wszystkie trzy możliwe wypadki: obie liczby dodatnie; jedna dodatnia, druga ujemna; obie ujemne.

Można to wyrazić w następujący sposób:

Jeżeli punkt A porusza się wzdłuż linii prostej w kierunku dodatnim, to odległość jego od nieruchomego punktu 0 *stale wzrasta.*

235. Wzór, wyrażający, że jedna liczba jest większa lub mniejsza od drugiej, nazywamy *nierównością*. O nierównościach takich jak:

$$a > b \quad \text{i} \quad b < a$$

mówimy, że mają *zwroty przeciwne*. Widzimy, że *można przestawić obie strony nierówności, zmieniając jednocześnie ich zwrot.*

Nierówność $a > b$ oznacza, że różnica $a - b$ jest dodatnia, co można jeszcze i tak napisać:

$$a - b > 0.$$

Oznaczywszy przez c jakąkolwiek liczbę, dostaniemy.

$$a + c - (b + c) = a - b.$$

Jeżeli $a - b$ jest dodatnie, to i $a + c - (b + c)$ jest dodatnie, to znaczy: jeżeli

$$a > b,$$

to będzie także:

$$a + c > b + c,$$

i tak samo znaleźlibyśmy:

$$a - c > b - c.$$

Podobnie z nierówności

$$a < b$$

wypadnie:

$$a + c < b + c$$

$$a - c < b - c.$$

Wyrazimy to za pomocą następującego twierdzenia:

Zwrot nierówności nie zmieni się, jeżeli do obu stron dodamy lub od obu stron odejmiemy ilości równe.

Naprzykład z nierówności

$$3 > -7$$

wypada:

$$3 + 5 > -7 + 5$$

$$3 - 5 > -7 - 5$$

czyli:

$$8 > -2$$

$$-2 > -12$$

Zwrot nierówności nie zmieni się, jeżeli obie strony pomnożymy lub podzielimy przez jednę i tę samę liczbę dodatnią; zwrot się zmieni, jeżeli obie strony pomnożymy lnb podzielimy przez jednę i tę samę liczbę ujemną.

Naprzykład, mnożąc obie strony nierówności

$$2 < 4$$

przez 3, otrzymamy:

$$6 < 12,$$

a dzieląc je przez 8:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

Te nierówności mają ten sam zwrot, co i nierówność dana. Gdybyśmy jednak pomnożyli obie strony przez — 2, dostalibyśmy:

$$-4 > -8,$$

a dzieląc przez — 2:

$$-1 > -2,$$

a więc nierówności, mające zwrot przeciwny zwrotowi danej nierówności.

Ażeby dowieść tego twierdzenia, wystarcza zauważyć, że iloczyn pewnej liczby przez liczbę dodatnią ma ten sam znak co mnożna, a przez liczbę ujemną — znak przeciwny znakowi mnożnej; jeżeli więc

$$a > b,$$

czyli:

$$a - b > 0,$$

i jeżeli c jest dodatnie, będzie także:

$$(a - b)c > 0,$$

to jest:

$$ac - bc > 0,$$

$$ac > bc;$$

jeżeli zaś c jest ujemne, będzie:

$$(a - b)c < 0$$

$$ac - bc < 0$$

$$ac < bc.$$

W razie dzielenia twierdzenie dowodzi się w takiż sam sposób.

236. *Nierównością stopnia pierwszego* nazywa się nierówność, w której oprócz wyrazów wiadomych występuje niewiadoma w potędze pierwszej. Naprzykład nierówność:

$$1 - \frac{2}{5}x > \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{5}$$

jest nierównością stopnia pierwszego względem x. Rozwiązać nierówność znaczy znaleść, jakie wartości dla niewiadomej x czynią jej zadość. Wykonywa się to w sposób zupełnie podobny rozwiązywaniu równań, należy tylko pamiętać o zmianie zwrotu przy mnożeniu albo dzieleniu stron nierówności przez liczbę ujemną.

Ażeby więc rozwiązać powyższą nierówność, znosimy w niej mianowniki, mnożąc obie strony przez 10:

$$10 - 4x > 5x + 12;$$

przenosimy wyraz niewiadomy na lewą, a wiadomy na prawą stronę:

$$-9x > 2$$

i dzielimy przez — 9, zmieniając jednocześnie zwrot:

$$x < -\frac{2}{9}.$$

Znaleźliśmy więc, że nierówność dana ma miejsce przy każdym x mniejszem od $-\frac{2}{9}$.

PRZYKŁADY XXVII.

1. $3x - 3 > 5x - 5.$ 2. $4x - 8 > 8x - 3.$

3. $\frac{2}{3}x - 3 > 2x + \frac{3}{7}.$ 4. $-\frac{1}{4}x > 5x - \frac{5}{7}.$

5. Mam w dzbanku pewną ilość wina. Gdybym trzecią część tego wina zmieszał z 2 kwartami wody, to dostałbym

więcej, aniżeli mieszając połowę wina z 1 kwartą wody. Przy jakiej ilości wina jest to możliwe?

XXVIII.

Podnoszenie do potęg, a w szczególności podnoszenie do kwadratu i sześcianu.

237. Określiliśmy już wyżej *potęgę* jako iloczyn dwóch lub więcej *czynników równych*, i pokazaliśmy jakiego sposobu używamy do oznaczenia potęg (paragrafy 15, 16 i 17). Działanie, za pomocą którego otrzymujemy potęgi, nazywa się *podnoszeniem do potęg*. Podnoszenie do potęg jest więc szczególnym przypadkiem mnożenia; lecz tak często mamy z niem do czynienia, że wypada poświęcić mu rozdział oddzielny. Czytelnik spotka w nim zasady, z któremi już po części zapoznał się dawniej.

238. *Każda potęga parzysta ilości ujemnej jest dodatnią, każda zaś potęga nieparzysta jest ujemną.*

Jest to bezpośredniem następstwem *prawidła znaków*. Tak np.

$$-a \times -a = a^2,$$

$$-a \times -a \times -a = a^2 \times -a = -a^3;$$

$$-a \times -a \times -a \times -a = -a^3 \times -a = a^4;$$

i tak dalej. W następnych paragrafach, skoro mówić będziemy: *dać znak właściwy*, rozumieć będziemy pod tym wyrażeniem znak wypadający z zastosowania prawidła, podanego w tym §.

239. Prawidło na podniesienie potęgi do potęgi. *Wykładnik potęgi, do której już jest podniesiona dana ilość, należy pomnożyć przez wykładnik nowej potęgi, i ten iloczyn wziąć za wykładnik ostatecznego wypadku. Całemu zaś wypadkowi należy dać znak właściwy.*

Tak naprzykład:

$$(a^2)^3 = a^6, \qquad (-a^3)^3 = -a^9;$$

$$(a^4)^3 = a^{12}; \qquad (-a^4)^3 = -a^{12}.$$

Prawidło to jest bezpośrednim wynikiem prawidła na wykładnik, dowiedzionego w § 57. Naprzykład:

$$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \times 3} = a^6.$$

Prawidło dopiero co podane, bezpośrednio prowadzi do następnego:

240. Prawidło na podniesienie do jakiejkolwiek potęgi jednomianu całkowitego: *Wykładnik każdego czynnika należy pomnożyć przez wykładnik potęgi i wypadkowi dać znak właściwy.*

Tak naprzykład:

$$(a^2 b^3)^2 = a^4 b^6; \qquad (-a^2 b^3)^3 = -a^6 b^9;$$

$$(ab^2 c^3)^4 = a^4 b^8 c^{12}; \qquad (-a^2 b^3 c^4)^5 = -a^{10} b^{15} c^{20};$$

$$(2ab^2 c^3)^6 = 2^6 a^6 b^{12} c^{18} = 64a^6 b^{12} c^{18}.$$

241. Prawidło na podniesienie do jakiejkolwiek potęg ułamka: *Należy licznik i mianownik podnieść do tej potęgi i dać wypadkowi znak właściwy.*

Wypada to z paragr. 140. Naprzykład:

$$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 = \frac{a^4}{b^6}; \qquad \left(-\frac{a^2}{b^3}\right)^3 = -\frac{a^6}{b^9};$$

$$\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^4 = \frac{2^4 a^8}{3^4 b^4} = \frac{16a^8}{81b^4}.$$

242. Niektóre przykłady na podnoszenie do potęg *dwumianów* były już podane: patrz §§ 80 i 86. Tak np.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Uczący się powinien, jako ćwiczenie, znaleść czwartą, piątą i szóstą potęgę dwumianu $a+b$. Wypadki będą następujące:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4;$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5,$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

W podobny sposób znajdziemy:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3,$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4,$$
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5,$$
$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5 b + 15a^4 b^2 - 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

Widzimy, że w powyższym szeregu równości, przed każdym wyrazem w którym b wchodzi w potędze *nieparzystej*, znajduje się znak *mniej*; tym sposobem możemy każdą potęgę dwumianu $(a-b)$ bezpośrednio wynaleść z odpowiedniej potęgi dwumianu $(a+b)$, zmieniając znaki na przeciwne w tych wyrazach, do których wchodzi b w potędze nieparzystej.

243. Uczący się przekona się później, że za pomocą twierdzenia, zwanego *dwumianem Newtona* można otrzymać każdą potęgę dwumianu, nie wykonywając roboty mnożenia.

244. Wzory podane w § 242 mogą być użyte w ten sposób, jaki wyłożyliśmy w § 82. Przypuśćmy np., że chcemy znaleść czwartą potęgę dwumianu $2x - 3y$. We wzorze na $(a-b)^4$ podstawmy $2x$ zamiast a i $3y$ zamiast b; tym sposobem będzie:

$$(2x-3y)^4 = (2x)^4 - 4(2x)^3(3y) + 6(2x)^2(3y)^2 -$$
$$- 4(2x)(3y)^3 + (3y)^4 = 16x^4 - 96x^3 y + 216x^2 y^2 -$$
$$- 216xy^3 + 81y^4.$$

245. Łatwo się przekonać, że można podniesienie do potęgi wykonać w rozmaity sposób. Tak naprzykład: przypuśćmy, że chcemy znaleść szóstą potęgę $(a+b)$. Możemy ją znaleść przez wykonanie kilkakrotne mnożenia przez $(a+b)$. Albo też możemy najprzód znaleść sześcian $(a+b)$ i następnie sześcian ten podnieść do kwadratu, gdyż kwadrat wyrażenia $(a+b)^3$ jest $(a+b)^6$. Albo nakoniec możemy najprzód znaleść kwadrat $(a+b)$, i następnie otrzymany wypadek podnieść do sześcianu, gdyż sześcian wyrażenia $(a+b)^2$ jest $(a+b)^6$. Podobnież ósmą potęgę $(a+b)$ można znaleść podnosząc do kwadratu wyrażenie $(a+b)^4$, lub podnosząc do potęgi czwartej $(a+b)^2$. I t. d.

246. Niektóre przykłady podnoszenia do potęg *trójmianów* już były dane przedtem; patrz §§ 83 i 86. Tak np.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca;$$
$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(c+a) +$$
$$\times\, 3c^2(a+b) + 6abc.$$

Wzory te mogą być użyte w taki sposób, jaki był wytłumaczony w § 82. Tak np. przypuśćmy, że chcemy znaleść $(1-2x+3x^2)^2$. We wzorze na $(a+b+c)^2$ podstawmy 1 zamiast a, $-2x$ zamiast b, i $3x^2$ zamiast c. Otrzymamy:

$$(1-2x+3x^2)^2 = (1)^2 + (-2x)^2 + (3x^2)^2 + 2(1)(-2x) +$$
$$+ 2(-2x)(3x^2) + 2(1)(3x^2) = 1 + 4x^2 + 9x^4 - 4x -$$
$$- 12x^3 + 6x^2 = 1 - 4x + 10x^2 - 12x^3 + 9x^4.$$

Podobnież mieć będziemy:

$$(1-2x+3x^2)^3 = (1)^3 + (-2x)^3 + (3x^2)^3 +$$
$$+ 3(1)^2(-2x+3x^2) + 3(-2x)^2(1+3x^2) + 3(3x^2)^2(1-2x) +$$
$$+ 6(1)(-2x)(3x^2) =$$
$$= 1 - 8x^3 + 27x^6 + 3(-2x+3x^2) + 12x^2(1+3x^2) +$$
$$+ 27x^4(1-2x) - 36x^3 =$$
$$= 1 - 6x + 21x^2 - 44x^3 + 63x^4 - 54x^5 + 27x^6.$$

247. Widoczną jest rzeczą, że kwadrat jakiegokolwiek wielomianu można znaleść za pomocą jednego z trzech następnych prawideł:

1-sze. Ponieważ np.

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad +$$
$$+ 2bc + 2bd + 2cd,$$

przeto możemy powiedzieć, że: *kwadrat jakiegokolwiek wielomianu jest równy sumie kwadratów pojedynczych wyrazów,* *więcej sumie podwójnych iloczynów tychże wyrazów branych po dwa.*

2-re. Ten sam wypadek możemy wyrazić w tej postaci:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2a(b+c+d) + b^2 + 2b(c+d) + c^2 + 2cd + d^2,$$

co prowadzi do następnego prawidła: *kwadrat jakiegokolwiek wielomianu jest równy sumie kwadratów pojedynczych wyrazów, więcej podwojony iloczyn każdego wyrazu przez sumę tych wyrazów, które po nim następują.*

3-cie. Również widoczną jest rzeczą, że można ten sam kwadrat:

$$(a+b+c+d)^2$$

wyrazić i w ten sposób:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2;$$

czyli: *kwadrat wielomianu jest równy sumie kwadratów pojedynczych wyrazów, więcej podwójny iloczyn każdego wyrazu przez sumę tych wyrazów, które go w wielomianie poprzedzają.*

248. Zastosujemy teraz wyłożone powyżej zasady do podnoszenia do kwadratu i do sześcianu liczb, wyrażonych arytmetycznie za pomocą cyfr.

A. Podnoszenie do kwadratu.

Kwadraty liczb jednocyfrowych są podane w tabliczce mnożenia.

Są one:

$1^2 = 1$,	$5^2 = 25$,
$2^2 = 4$,	$6^2 = 36$,
$3^2 = 9$,	$7^2 = 49$,
$4^2 = 16$,	$8^2 = 64$,
	$9^2 = 81$.

Kwadrat liczby złożonej z jednej cyfry znaczącej i ilukolwiek zer znajdziemy, podnosząc do kwadratu liczbę wyrażoną cyfrą znaczącą i dopisując do wypadku dwa razy więcej zer, aniżeli było w danej liczbie. Tak np.

$$(30)^2 = 30 \times 30 = 900,$$
$$(400)^2 = 400 \times 400 = 160000,$$
$$(8000)^2 = 8000 \times 8000 = 64000000.$$

I w ogólności liczbę złożoną z jednej cyfry znaczącej z ilukolwiek zerami, możemy napisać tak:

$$a \,.\, 10^n,$$

gdzie a oznacza wartość tej cyfry, a n liczbę zer. Podnosząc do kwadratu, otrzymamy:

$$a^2 \,.\, 10^{2n},$$

co wyraża nam ogólnie zasadę podaną wyżej. Tęż samę zasadę oczywiście można zastosować i do każdej liczby, złożonej z ilukolwiek cyfr znaczących, po których następuje pewna liczba zer. W celu podniesienia do kwadratu takiej liczby, należy podnieść do kwadratu tę liczbę, jaka z niej będzie otrzymaną przez opuszczenie zer, i do znalezionego wypadku, dopisać dwa razy większą liczbę zer, aniżeli było w danej liczbie.

249. Podnoszenie do kwadratu liczb wielocyfrowych najdogodniej odbywa się na zasadzie wzoru służącego za podstawę do podnoszenia do kwadratu i wielomianów, mianowicie wzoru na podnoszenie do kwadratu dwumianu. Wiemy że:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad . \quad . \quad (1)$$

lub, wyłączając z dwóch ostatnich wyrazów b za nawias:

$$(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)b \quad . \quad . \quad (2)$$

Wzór ten w obu postaciach zarówno często się używa.

Weźmy najprzód pod uwagę liczbę dwucyfrową, np. 57, i podnieśmy ją do kwadratu; będzie:

$$(57)^2 = (50+7)^2 = 50^2 + 2 \,.\, 50 \,.\, 7 + 7^2,$$

lub, podług wzoru (2):

$$(57)^2 = (50 + 7)^2 = 50^2 + (2 . 50 + 7) . 7.$$

Działanie w praktyce rozkładamy w ten sposób:

Podług pierwszego wzoru:

$$\begin{array}{r} 50^2 = 2500 \\ 2 . 50 . 7 = 700 \\ 7^2 = 49 \\ \hline (57)^2 = 3249 \end{array}$$

Podług drugiego zaś:

$$\begin{array}{r} 50^2 = 2500 \\ 107 . 7 = 749 \\ \hline (57)^2 = 3249 \end{array}$$

Widzimy, że drugi sposób rachowania prowadzi prędzej do celu. Toż samo stosuje się i do podnoszenia do kwadratu liczb wielocyfrowych.

250. Weźmy dalej jako przykład: $(386)^2$.

I tutaj możemy uważać tę liczbę jako trójmian $300 + 80 + 6$, który należy podnieść do kwadratu. Podług§ 247, będzie:

$$(386)^2 = (300 + 80 + 6)^2 = 300^2 + 2 . 300 . 80 + 80^2 + \\ + 2 . 380 . 6 + 6^2.$$

Wypadek ten wyrazić można słowami w następny sposób. Kwadrat liczby trzycyfrowej jest równy: *kwadratowi setek, więcej podwójnemu iloczynowi z setek przez dziesiątki, więcej kwadratowi dziesiątków; więcej podwójnemu iloczynowi z setek i dziesiątków przez jednostki, więcej kwadratowi jedności.*

Działanie w praktyce rozkłada się w następny sposób:

$$\begin{array}{r} 300^2 = 90000 \\ 2 . 300 . 80 = 48000 \\ 80^2 = 6400 \\ 3 . 380 . 6 = 4560 \\ 6^2 = 36 \\ \hline (386)^2 = 148996. \end{array}$$

Lecz możemy także znaleść z czego się składa kwadrat liczby trzycyfrowej, stosując do tej liczby bezpośrednio wzór (2). W rzeczy samej mamy:

$$(386)^2 = (380 + 6)^2 = (380)^2 + (2 . 380 + 6) . 6.$$

A że:

$$(380)^2 = (300 + 80)^2 = 300^2 + (2 . 300 + 80) . 80,$$

przeto, podstawiając tę wartość w poprzednią równość, znajdziemy:

$$(386)^2 = 300^2 + (2 . 300 + 80) . 80 + (2 . 380 + 6) . 6.$$

Wyrażenie to nie trudno daje się wyrazić słowami; przy obliczeniach zaś praktycznych, czyni rachunki znacznie prostszymi, i nie wymagającymi żadnych robót na boku. Obliczenie tego wyrażenia wykonywa się w następny sposób:

$$\begin{array}{r} 300^2 = 90000 \\ 680 . 80 = 54400 \\ 766 . 6 = 4596 \\ \hline (386)^2 = 148996. \end{array}$$

Podobnież możemy postępować i z cztero — pięcio — i t. d. cyfrowemi liczbami. Naprzykład: przypuśćmy, że mamy podnieść do kwadratu 8279. W tym celu stosujemy kilkakrotnie wzór (2); będzie najprzód:

$$(8279)^2 = (8270 + 9)^2 = (8270)^2 + (2 . 8270 + 9) . 9.$$

Lecz dalej mamy:

$$(8270)^2 = (8200 + 70)^2 = (8200)^2 + (2 . 8200 + 70) 70;$$

i znowuż:

$$(8200)^2 = (8000 + 200)^2 = 8000^2 + (2 . 8000 + 200) . 200.$$

Podstawiając ostatnio znalezione wyrażenie w poprzednie, a tę zaś wartość na $(8270)^2$, jaką z tego podstawienia otrzymamy, w wyrażenie pierwsze, mieć będziemy:

$$(8279)^2 = 8000^2 + (2 . 8000 + 200) 200 + (2 . 8200 + 70) 70 + \\ + (2 . 8270 + 9) . 9.$$

W wyrażeniu tem widzimy już jasno ogólne prawidło, podług którego tworzą się kwadraty liczb ilukolwiek cyfrowych. Obliczenie dokonywa się w ten sposób:

$$\begin{array}{r} 8000^2 = 64000000 \\ 16200 \,.\, 200 = 3240000 \\ 16470 \,.\, 70 = 1152900 \\ 16549 \,.\, 9 = 148941 \\ \hline (8279)^2 = 68541841. \end{array}$$

Tak samo postępując znajdziemy, że:

$$(43786)^2 = 40000^2 + (2 \,.\, 40000 + 3000) \,.\, 3000 + \\ + (2 \,.\, 43000 + 700)\, 700 + \\ + (2 \,.\, 43700 + 80)\, 80 + (2 \,.\, 43780 + 6) \,.\, 6;$$

i rachunek układa się w podobnyż sposób:

$$\begin{array}{r} 40000^2 = 1600000000 \\ 83000 \,.\, 3000 = 249000000 \\ 86700 \,.\, 700 = 60690000 \\ 87480 \,.\, 80 = 6998400 \\ 87566 \,.\, 6 = 525396 \\ \hline (43786)^2 = 1917213796. \end{array}$$

Często przy wykonywaniu tego rachunku opuszczają zera na końcu otrzymywanych kwadratów i iloczynów, tak jak to ma miejsce i przy mnożeniu liczb. Tak np. w ostatnim przykładzie rachunek może być ułożony w ten sposób:

$$\begin{array}{r} 40000^2 = 16 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ 83000 \,.\, 3000 = 249 \,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ 86700 \,.\, 700 = 6069 \,.\,.\,.\,. \\ 87480 \,.\, 80 = 69984 \,.\,. \\ 87566 \,.\, 6 = 525396 \\ \hline (43786)^2 = 1917213796. \end{array}$$

Dla uniknięcia wszakże łatwych pomyłek przy tym sposobie prowadzenia rachunku, początkujący lepiej zrobi wypisując wszystkie zera.

251. Ułamki zwyczajne, podług prawidła podanego w § 241 podnoszą się do kwadratu, przez podniesienie do kwadratu osobno licznika i osobno mianownika. Przy podnoszeniu do kwadratu całkowitej z ułamkiem, należy najprzód tęż całkowitą włączyć w ułamek i następnie stąd otrzymany ułamek, podnieść do kwadratu. Naprzykład:

$$\left(5\frac{8}{15}\right)^2 = \left(\frac{83}{15}\right)^2 = \frac{(83)^2}{(15)^2}$$

$$(83)^2 = 80^2 + (2 \,.\, 80 + 3) \,.\, 3,$$
$$(15)^2 = 10^2 + (2 \,.\, 10 + 5) \,.\, 5.$$

$$\begin{array}{rcl} 80^2 = 6400 & \qquad & 10^2 = 100 \\ 163 \,.\, 3 = 489 & & 25 \,.\, 5 = 125 \\ \hline (83)^2 = 6889, & & (15)^2 = 225, \end{array}$$

stąd:

$$\left(5\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{6889}{225} = 30\frac{139}{225}.$$

252. Aby ułamek dziesiętny podnieść do kwadratu należy albo zamienić go na zwyczajny i następnie znaleść kwadrat otrzymanego ułamka zwyczajnego: albo też podnieść do kwadratu *liczbę otrzymaną przez opuszczenie w nim przecinka, i w znalezionym kwadracie odciąć na dziesiętne dwa razy więcej cyfr, aniżeli było w danym ułamku.*

W rzeczy samej; przypuśćmy, że mamy podnieść do kwadratu 0,006; będzie:

$$(0{,}006)^2 = 0{,}006 \times 0{,}006 = 0{,}000036.$$

Podobnież:

$$(2{,}5)^2 = 2{,}5 \times 2{,}5 = 6{,}25.$$

253. Do tej nauki o podnoszeniu do kwadratu można dołączyć jeszcze następujące uwagi:

1-sze. Ponieważ wszystkie części, z których się składa kwadrat liczby całkowitej są zakończone zerami, z wyjątkiem kwadratu jedności, przeto ostatnia cyfra kwadratu jakiejkolwiek całkowitej, będzie zawsze taką, jaką jest ostatnia cyfra kwadratu jedności tejże liczby. A że kwadraty liczb jednocyfrowych są zakończone na cyfry 1, 4, 5, 6 i 9, przeto kwadraty liczb jakichkolwiek mogą być zakończone tylko temi cyframi. Kwadrat więc, nie może być zakończony na żadną z tych cyfr: 2, 3, 7 i 8. Podobnież: jeżeli kwadrat jest zakończony zerami, to liczba tych zer musi być parzystą.

2-re. Kwadrat liczby większej od jedności, jest większy od tejże liczby; kwadrat zaś liczby mniejszej od jedności, jest mniejszy od liczby podnoszonej do kwadratu.

3-cie. Ponieważ:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

przeto, mając już wiadomy kwadrat jakiejkolwiek liczby a, łatwo można znaleść kwadrat liczby o jedność od niej większej, przez dodanie do tegoż kwadratu podwojonej tej liczby i jedności.

Tak np. skoro wiemy, że:

$$(15)^2 = 225,$$

to $(16)^2 = 225 + 2 . 15 + 1 = 225 + 30 + 1 = 256;$

i dalej: $(17)^2 = 256 + 32 + 1 = 289,$ i t. d.

Podobnież może być użytecznym i wzór:

$$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1.$$

Np., wiedząc że: $1000^2 = 1000000$, znajdziemy:

$$(999)^2 = (1000-1)^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001.$$

B. Podnoszenie do sześcianu.

254. Podług określenia sześcianem danej liczby nazywamy iloczyn, który otrzymamy, biorąc tę liczbę za czynnik trzy razy.

Sześciany liczb jednocyfrowych, są następne:

$$1^3 = 1, \qquad 2^3 = 8,$$
$$3^3 = 27, \qquad 4^3 = 64,$$
$$5^3 = 125, \qquad 6^3 = 216,$$

$$7^3 = 343, \qquad 8^3 = 512,$$
$$9^3 = 729.$$

Sześcian każdej liczby, złożonej z jednej cyfry znaczącej i ilukolwiek zer znajdujemy, podnosząc do sześcianu liczbę, wyrażoną tą cyfrą znaczącą i dopisując do tego sześcianu trzy razy więcej zer, aniżeli ich było w danej liczbie. Np.:

$$(60)^3 = 60 \times 60 \times 60 = 216000,$$
$$(400)^3 = 400 \times 400 \times 400 = 64000000.$$

I w ogóle: oznaczając przez a jakąkolwiek liczbę jednocyfrową, — liczbę, złożoną z jednej cyfry znaczącej i ilukolwiek zer możemy wyrazić tak:

$$a . 10^n,$$

gdzie n oznacza liczbę zer po tej cyfrze znaczącej. Podnosząc to wyrażenie do sześcianu, otrzymamy:

$$(a . 10^n)^3 = a^3 . 10^{3n};$$

a równość ta zawiera zasadę podaną wyżej.

Oczywiście, że taż sama zasada daje się zastosować i do tego przypadku, gdy liczba jest złożoną z kilku cyfr znaczących i ilukolwiek zer. Wtedy w celu podniesienia tejże liczby do sześcianu, należy podnieść do sześcianu liczbę otrzymaną przez opuszczenie zer, i do tego wypadku dopisać trzy razy więcej zer, aniżeli ich było w danej liczbie.

255. Podnoszenie do sześcianu liczb, złożonych z ilukolwiek cyfr, opiera się na wzorze, dającym nam sześcian dwumianu $a + b$. Znaleźliśmy wyżej, że:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad . \quad . \quad (1)$$

Wzoru tego możemy bezpośrednio użyć do podnoszenia do sześcianu jakiejkolwiek liczby dwucyfrowej. Np. przypuśćmy, że chcemy znaleźć $(37)^3$. Będzie:

$$(37)^3 = (30+7)^3 = 30^3 + 3 . 30^2 . 7 + 3 . 30 . 7^2 + 7^3.$$

Działanie wykonywa się w następny sposób:

$$\begin{array}{r}
30^3 = 27000 \\
3 \,.\, 30^2 \,.\, 7 = 18900 \\
3 \,.\, 30 \,.\, 7^2 = 4410 \\
7^3 = 343 \\
\hline
(37)^3 = 50653.
\end{array}$$

Lecz zazwyczaj, w celu dogodniejszego wykonania rachunków nie używamy wzoru na $(a + b)^3$, ale przerabiamy go dalej, na dogodniejszą do obliczeń postać, w następny sposób:

Z trzech wyrazów ostatnich wyłączmy najprzód b za nawias, otrzymamy:

$$(a + b)^3 = a^3 + \{3a^2 + 3ab + b^2\}b;$$

następnie z dwóch ostatnich wyrazów, zawartych w nawiasie, wyłączmy także b za nawias; będzie:

$$(a + b)^3 = a^3 + \{3a^2 + (3a + b)\,b\}b \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

I pod tą postacią najdogodniej jest używać wzoru na podnoszenie do sześcianu liczb, wyrażonych cyframi.

Pokażemy na przykładach jego użycie. Weźmy najprzód tęż samę liczbę dwucyfrową, i podnieśmy ją do sześcianu. Stosując wzór (2), mamy:

$$(37)^3 = 30^3 + \{3 \,.\, 30^2 + (3 \,.\, 30 + 7) \,.\, 7\} \,.\, 7.$$

Oznaczymy dla krótkości współczynnik
$3 \,.\, 30^2 + (3 \,.\, 30 + 7) \,.\, 7$ przez A; wtedy będzie:

$$(37)^3 = 30^3 + A \,.\, 7.$$

Działania rozkładają się w trzy kolumny w taki sposób:

Obliczenie współczynnika A.

$$\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
\text{I)} & 3 \,.\, 30 = 90 & \text{II)} & 3 \,.\, 30^2 = 2700 \\
 & 7 & & 97 \,.\, 7 = 679 \\
\cline{2-2}\cline{4-4}
 & 3 \,.\, 30 + 7 = 97 & & A = 3379
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\text{III)} & 30^3 = 27000 \\
 & A \,.\, 7 = 23653 \\
\cline{2-2}
 & 37^3 = 50653.
\end{array}$$

Zadajmy sobie dalej podnieść do sześcianu liczbę trzycyfrową, np.: 483. W tym celu rozkładamy ją najprzód na 480 i 3, i stosujemy do tak otrzymanego dwumianu wzór (2) Będzie:

$$\begin{aligned}(483)^3 = (480 + 3)^3 = 480^3 &+ \\ + \{3 \,.\, 480^2 + (3 \,.\, 480 + 3) \,.\, 3\} \,.\, 3.&\end{aligned}$$

Lecz: $480 = 400 + 80$; więc:

$$\begin{aligned}(480)^3 = (400 + 80)^3 = 400^3 &+ \\ + \{3 \,.\, 400^2 + (3 \,.\, 400 + 80)\, 80\} \,.\, 80.&\end{aligned}$$

Podstawiając tak znalezioną wartość we wzór poprzedn będzie:

$$\begin{aligned}(483)^3 = 400^3 + \{3 \,.\, 400^2 + (3 \,.\, 400 + 80) \,.\, 80\} \,.\, 80 &+ \\ + \{3 \,.\, 480^2 + (3 \,.\, 480 + 3) \,.\, 3\} \,.\, 3.&\end{aligned}$$

Oznaczając tak jak poprzednio:

$$3 \,.\, 400^2 + (3 \,.\, 400 + 80) \,.\, 80, \text{ przez } A,$$
$$3 \,.\, 480^2 + (3 \,.\, 480 + 3) \,.\, 3, \text{ przez } B,$$

możemy napisać;

$$(483)^3 = 400^3 + A \,.\, 80 + B \,.\, 3.$$

Rachunek rozkładamy w ten sposób:

Obliczenie współczynników A i B.

$$\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
\text{I)} & 3 \,.\, 400 = 1200 & \text{II)} & 3 \,.\, 400^2 = 480000 \\
 & 80 & & 1280 \,.\, 80 = 102400 \\
\cline{2-2}\cline{4-4}
 & 3 \,.\, 400 + 80 = 1280 & & A = 582400 \\
 & 2 \,.\, 80 = 160 & & 80^2 = 5400 \\
\cline{2-2}\cline{4-4}
 & 3 \,.\, 480 = 1440 & & 3 \,.\, 480^2 = 691200 \\
 & 3 & & 1443 \,.\, 3 = 4329 \\
\cline{2-2}\cline{4-4}
 & 3 \,.\, 480 + 3 = 1443 & & B = 695529
\end{array}$$

Ostateczne wypadki:

$$\begin{array}{lr}
\text{III)} & 400^3 = 64000000 \\
 & A \,.\, 80 = 46592000 \\
 & B \,.\, 3 = 2086587 \\
\cline{2-2}
 & (483)^3 = 112678587
\end{array}$$

W pierwszej kolumnie sposób tworzenia rozmaitych części jest widoczny: gdy do $3 \,.\, 400 + 80$ dadamy podwojone ośmdziesiąt, otrzymamy

$$3 \,.\, 400 + 3 \,.\, 80 = 3 \,.\, (400 + 80) = 3 \,.\, 480.$$

W drugiej kolumnie sposób utworzenia $3 \,.\, 480^2$ z części poprzednio już znalezionych, wymaga objaśnienia. Ponieważ 480 możemy rozłożyć na 400 i 80, przeto $3 \,.\, 480^2 = 3 \,.\, (400 + 80)^2$. W celu znalezienia, jakim sposobem użyć poprzednio już otrzymanych części do obrachowania powyższej ilości, weźmy pod uwagę ogólne wyrażenie $3\,(a + b)^2$.

$$\begin{array}{ll}
\text{Ponieważ:} & (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \\
\text{przeto:} & 3\,(a + b)^2 = 3a^2 + 6ab + 3b^2, \\
\text{czyli:} & 3\,(a + b)^2 = 3a^2 + 3ab + b^2 \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad + 3ab + b^2 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b^2, \\
\text{albo:} & 3\,(a + b)^2 = 3a^2 + (3a + b)b \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad + (3a + b)b \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b^2.
\end{array}$$

Stosując to wyrażenie do danego przypadku, widzimy, że:

$$\begin{aligned}
3 \,.\, 480^2 = 3 \,.\, 400^2 &+ (3 \,.\, 400 + 80) \,.\, 80 \\
&+ (3 \,.\, 400 + 80) \,.\, 80 \\
&+ 80^2.
\end{aligned}$$

A że: $3 \,.\, 400^2 + (3 \,.\, 400 + 80)80$ jest to ilość, którą oznaczyliśmy przez A; $(3 \,.\, 400 + 80)80$ jest znowuż ilością napisaną powyżej A w drugiej kolumnie, przeto jeżeli dopiszemy pod A 80^2 i następnie dodamy liczby, zawarte w trzech ostatnich wierszach, tym sposobem otrzymanych, znajdziemy $3 \,.\, 480^2$. Te trzy wiersze, które należy dodać w celu znalezienia $3 \,.\, 480^2$, są w drugiej kolumnie zakreślone klamrą.

Inne części rachunku objaśniają się same przez się.

Gdybyśmy jeszcze mieli podnieść do sześcianu liczbę 5284, wtedy rozumowanie podobne do tego, jakiego użyliśmy w poprzednim przykładzie, pokazałoby nam, że:

$$\begin{aligned}
(5284)^3 = 5000^3 &+ [3 \,.\, 5000^2 + (3 \,.\, 5000 + 200)\, 200]\, 200 + \\
&+ [3 \,.\, 5200^2 + (3 \,.\, 5200 + 80)\; 80]\; 80 + \\
&+ [3 \,.\, 5280^2 + (3 \,.\, 5280 + 4)\; 4]\; 4.
\end{aligned}$$

Oznaczając dla skrócenia współczynniki przy 200, 80 i 4 głoskami A B i C, będzie:

$$(5284)^3 = 5000^3 + A \,.\, 200 + B \,.\, 80 + C \,.\, 4.$$

Rachunek znowuż rozkłada się w trzy następujące kolumny:

Obliczenie współcz. A, B i C.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I)} & 3 \,.\, 5000 &=& 15000 \\
 & & & 200 \\
\hline
 & 3 \,.\, 5000 + 200 &=& 15200 \\
 & 2 \,.\, 200 &=& 400 \\
\hline
 & 3 \,.\, 5200 &=& 15600 \\
 & & & 80 \\
\hline
 & 3 \,.\, 5200 + 80 &=& 15680 \\
 & 2 \,.\, 80 &=& 160 \\
\hline
 & 3 \,.\, 5280 &=& 15840 \\
 & & & 4 \\
\hline
 & 3 \,.\, 5280 + 4 &=& 15844
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcl}
\text{II)} & 3 \,.\, 5000^2 &=& 75000000 \\
 & 15200 \,.\, 200 &=& 3040000 \\
 & A &=& 78040000 \\
 & 200^2 &=& 40000 \\
\hline
 & 3 \,.\, 5200^2 &=& 81120000 \\
 & 15680 \,.\, 80 &=& 1254400 \\
 & B &=& 82374400 \\
 & 80^2 &=& 6400 \\
\hline
 & 3 \,.\, 5280^2 &=& 83635200 \\
 & 15844 \,.\, 4 &=& 63376 \\
\hline
 & C &=& 83698576.
\end{array}$$

Obliczenie ostateczne:

$$\begin{array}{lrcr}
\text{III)} & 5000^3 &=& 125000000000 \\
 & A \,.\, 200 &=& 15608000000 \\
 & B \,.\; 80 &=& 6589952000 \\
 & C \,.\; 4 &=& 334794304 \\
\hline
 & (5284)^3 &=& 147532746304
\end{array}$$

Rachunki w ten sposób wykonywane nie prowadzą bez wątpienia prędszą drogą do podniesienia do sześcianu liczby danej, aniżeli zwyczajne mnożenie; z tem wszystkiem należy nam się dobrze z nimi zaznajomić, gdyż odgrywają one ważną rolę przy działaniu odwrotnem: wyciągania pierwiastku.

Aby podnieść do sześcianu ułamek, należy oddzielnie podnieść licznik i oddzielnie mianownik, (§ 241). Przy podnoszeniu całkowitej z ułamkiem należy też całkowitą włączyć w ułamek i postępować podobnie, jak to było wskazane przy podnoszeniu do kwadratu.

Nakoniec ułamek dziesiętny podnosi się w ten sposób, że podnosi się do sześcianu liczba, otrzymana przez opuszczenie przecinka w ułamku, i w znalezionym sześcianie odcina się trzy razy więcej cyfr na dziesiętne, aniżeli ich było w danym ułamku. W rzeczy samej:

$$(0{,}08)^3 = 0{,}08 \times 0{,}08 \times 0{,}08 = 0{,}000512$$
$$(3{,}7)^3 = 3{,}7 \times 3{,}7 \times 3{,}7 = 50{,}653.$$

PRZYKŁADY XXVIII.

Znaleść:

1. $(2x^2y^3z^4)^3$, 2. $(-2x^2y^2z^3)^3$.

3. $\left(-\dfrac{4x}{3y^2}\right)^3$; 4. $(a+b)^3(a-b)^3$;

5. $(1+x)^5-(1-x)^5$. 6. $(1+x)^4(1-x)^4$.

7. $(1+x+x^2)^2$. 8. $(1+x+x^2)^3$.

Podnieść do kwadratu następujące liczby:

9. 48, 99, 301, 425, 999, 8354, 8355, 9999, 13579.

10. $\frac{7}{12}$, $4\frac{3}{5}$, $23\frac{11}{13}$, 0,145; 0,00729; 8,9387; 89,387; 893,87.

11. Wiedząc że: $5248^2 = 27541404$ znaleść 5243^2 i 5252^2.

Podnieść do sześcianu następujące liczby:

12. 59; 99; 512; 748; 999; 5298; $\frac{13}{24}$; $7\frac{1}{15}$; 0,087; 0,00315; 9,3591.

XXIX.

Wyciąganie pierwiastku.

256. Wyciąganie pierwiastku jest działaniem odwrotnem podnoszeniu do potęgi; mianowicie nauka o wyciąganiu

pierwiastku podaje sposoby znalezienia jakiegokolwiek pierwiastku z danej liczby, lub z danego wyrażenia.

Zaczniemy obecny rozdział od podania trzech twierdzeń, będących prostym wnioskiem z *prawidła znaków*; następnie rozbierzemy kolejno wyciąganie pierwiastków z jednomianów, wyciąganie pierwiastków kwadratowych z wielomianów i z liczb, i wyciąganie pierwiastku sześciennego z wielomianów i z liczb.

257. *Pierwiastek parzystej potęgi z liczby dodatniej ma dwie wartości: jednę dodatnią, drugą ujemną.*

Tak np. $a \times a = a^2$ i $-a \times -a = a^2$, przeto pierwiastek kwadratowy z a^2 jest albo a albo $-a$, czyli albo $+a$, albo $-a$.

258. *Pierwiastek potęgi nieparzystej z jakiejkolwiek ilości, ma ten sam znak co i dana ilość.*.

Tak np. pierwiastek sześcienny z a^3 jest a, pierwiastek zaś sześcienny z $-a^3$ jest $-a$.

259. *Ilość ujemna nie może mieć pierwiastku potęgi parzystej.*

Tak np. ilość $-a^2$ nie ma pierwiastku kwadratowego, gdyż jeżeli jakąkolwiek ilość pomnożymy przez nią samą, otrzymamy zawsze na wypadek ilość *dodatnią*.

Fakt ten, że ilość ujemna nie ma pierwiastku potęgi parzystej wyraża się samem nazwiskiem takiej ilości. Pierwiastek potęgi parzystej z ilości ujemnej nazywa się *ilością niemożliwą*, lub częściej *ilością urojoną*.

260. Prawidło na znalezienie pierwiastku jakiegokolwiek stopnia z jakiegokolwiek jednomianu całkowitego. *Należy podzielić wykładnik każdego czynnika przez wykładnik pierwiastku i przed wypadkiem napisać znak właściwy.* Tak np:

$$\sqrt{16a^2b^4} = \sqrt{4^2a^2b^4} = \pm 4ab^2;$$

$$\sqrt[3]{-8a^6b^9c^{12}} = \sqrt[3]{-2^3a^6b^9c^{12}} = -2a^2b^3c^4;$$

$$\sqrt[4]{256x^4y^8} = \sqrt[4]{4^4x^4y^8} = \pm 4xy^2.$$

261. Prawidło na wyciąganie pierwiastku z ułamka: *Należy znaleść pierwiastek licznika i pierwiastek mianownika osobno, i napisać znak właściwy przed wypadkiem.*

Tak np:
$$\sqrt{\frac{4a^2}{9b^4}} = \sqrt{\frac{2^2a^2}{3^2b^4}} = \pm\frac{2a}{3b^2}.$$

$$\sqrt[3]{-\frac{27a^6}{64b^3}} = \sqrt[3]{-\frac{3^3a^6}{4^3b^3}} = -\frac{3a^2}{4b}.$$

262. Przystępujemy teraz do wyłożenia sposobu wyciągania pierwiastku kwadratowego z wielomianów.

Pierwiastek kwadratowy z $a^2 + 2ab + b^2$ jest $a + b$; i rozważanie sposobu, w jaki $a + b$ pochodzi z $a^2 + 2ab + b^2$ doprowadzi nas do ogólnego prawidła na wyciąganie pierwiastku kwadratowego z jakiegokolwiek wielomianu.

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b. \\
 & a^2 \\
\hline
2a + b & 2ab + b^2 \\
 & 2ab + b^2 \\
\hline
\end{array}$$

Uporządkujmy najprzód wyrazy podług potęg jednej głoski np. a; wtedy pierwszym wyrazem będzie a^2; jego pierwiastek kwadratowy jest a i to będzie pierwszym wyrazem szukanego pierwiastku.

Odejmijmy jego kwadrat, to jest a^2, od danego wyrażenia, i podpiszmy resztę $2ab + b^2$. Podzielmy $2ab$ przez $2a$; iloraz będzie b, i to będzie drugim wyrazem pierwiastku. Do podwojonego wyrazu pierwszego dodajmy wyraz drugi: otrzymamy $2a + b$; pomnóżmy to ostatnie wyrażenie przez wyraz drugi, to jest b; otrzymane $2ab + b^2$ odejmujemy od reszty. I to w obecnym przypadku kończy całe działanie.

Gdyby było więcej wyrazów, wtedy należałoby z $a + b$ tak samo postępować, jak przedtem postępowaliśmy z a; kwadrat tego wyrażenia, to jest:

$a^2 + 2ab + b^2$ już został odjęty od wielomianu danego, tym sposobem należy tylko resztę podzielić przez $2\,(a + b)$ dla otrzymania nowego wyrazu pierwiastku. Aby otrzymać nowy odjemnik, należy pomnożyć sumę z $2\,(a + b)$ i nowego wyrazu, przez ten nowy wyraz.

263. Przykłady:

1.
$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2} = 2x + 3y \\
 & -4x^2 \\
\hline
4x + 3y & 12xy + 9y^2 \\
 & -12xy \pm 9y^2 \\
\hline
\end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{4x^4 - 20x^3 + 37x^2 - 30x + 9} = 2x^2 - 5x + 3 \\
 & -4x^4 \\
\hline
4x^2 - 5x & -20x^3 + 37x^2 - 30x + 9 \\
 & \mp 20x^3 \pm 25x^2 \\
\hline
4x^2 - 10x + 3 & 12x^2 - 30x + 9 \\
 & \pm 12x^2 \mp 30x \pm 9 \\
\hline
\end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{x^4 - 4x^3y + 10x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4} = x^2 - 2xy + 3y^2 \\
 & -x^4 \\
\hline
2x^2 - xy & -4x^3y + 10x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4 \\
 & \mp 4x^3y \pm 4x^2y^2 \\
\hline
2x^2 - 4xy + 3y^2 & 6x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4 \\
 & -6x^2y^2 \mp 12xy^3 \pm 9y^4 \\
\hline
\end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{x^6 + 4x^5 - 10x^3 + 4x + 1} = x^3 + 2x^2 - 2x - 1 \\
 & -x^6 \\
\hline
2x^3 + 2x^2 & 4x^5 - 10x^3 + 4x + 1 \\
 & -4x^5 \pm 4x^4 \\
\hline
2x^3 + 4x^2 - 2x & -4x^4 - 10x^3 + 4x + 1 \\
 & \mp 4x^4 \mp 8x^3 \pm 4x^2 \\
\hline
2x^3 + 4x^2 - 4x - 1 & 2x^3 - 4x^2 + 4x + 1 \\
 & \mp 2x^3 \mp 4x^2 \pm 4x \pm 1 \\
\hline
\end{array}$$

264. Wyżej była zrobiona uwaga, że każdy pierwiastek, którego wykładnik jest parzysty, ma znak podwójny; patrz § 257. Tak np. pierwiastek kwadratowy z $a^2 + 2ab +$

$+ b^2$ jest $a + b$, lub $- a - b$. W rzeczy samej przy wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z $a^2 + 2ab + b^2$, zaczynamy działanie od znalezienia pierwiastku z a^2. Lecz ten pierwiastek może być a lub $- a$. Jeżeli weźmiemy to ostatnie, i poprowadzimy działanie, jak było pokazane przedtem, wtedy dojdziemy do wypadku $- a - b$. Taż sama uwaga może być zrobioną w każdym podobnym przypadku. Weźmy np. ostatnie zadanie z § 263. Tutaj zaczynamy działanie od wyciągnięcia pierwiastku kwadratowego z x^6; — pierwiastek ten może być x^3, lub $- x^3$. Jeżeli przyjmiemy ostatnią wartość i prowadzić będziemy działanie jak wyżej, otrzymamy wypadek ostateczny: $- x^3 - 2x^2 + 2x + 1$.

265. Pierwiastek potęgi *czwartej* jakiegokolwiek wyrażenia, może być znaleziony przez wyciągnięcie pierwiastku kwadratowego z pierwiastku kwadratowego. Podobnież: pierwiastek potęgi *ósmej* może być znaleziony, przez wyciągnięcie pierwiastku kwadratowego z pierwiastku potęgi czwartej, i tak dalej.

266. Poprzednie zbadanie sposobu wyciągania pierwiastku kwadratowego z wielomianów algebraicznych da nam możność wytłumaczenia prawidła na wyciąganie pierwiastku kwadratowego z liczb.

Pierwiastek kwadratowy ze 100 jest 10; pierwiastek kwadratowy z 10000 jest 100; pierwiastek kwadratowy z 1000000 jest 1000; i t. d. Stąd wypada, że pierwiastek kwadratowy z liczby mniejszej od 100, musi się składać tylko z jednej cyfry, pierwiastek kwadratowy z liczby, zawartej pomiędzy 100 i 10000 — z dwóch cyfr; pierwiastek kwadratowy z liczby zawartej pomiędzy 10000 i 1000000 — z trzech cyfr, i tak dalej. Jeżeli więc nad każdą drugą cyfrą danej liczby, zaczynając od miejsca, na którem stoją jedności, napiszemy punkt, wtedy liczba punktów pokaże nam liczbę cyfr w pierwiastku kwadratowym z tejże danej liczby. Tak np.

pierwiastek kwadratowy z $4\dot{3}5\dot{6}$ składa się z dwóch cyfr; — pierwiastek kwadratowy z $6\dot{1}1\dot{5}2\dot{4}$ jest złożony z trzech cyfr.

267. Przypuśćmy, że chcemy znaleść pierwiastek kwadratowy z 3249.

Najprzód oznaczmy właściwe cyfry punktami podług

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{3\dot{2}4\dot{9}} = 50 + 7 \\ & 2500 \\ 100 + 7 & 749 \\ & 749 \end{array}$$

podanego prawidła; okazuje się, że szukany pierwiastek składać się będzie z dwóch cyfr. Niech $a + b$ oznacza ten pierwiastek, gdzie a jest wartością cyfry, stojącej na miejscu dziesiątek, a b wartością cyfry stojącej na miejscu jedności. Stąd widać, że a musi być największą liczbą dziesiątek, której kwadrat jest mniejszy od 3200; taką liczbą jest 50. Odejmijmy a^2, to jest kwadrat 50, od danej liczby; — wtedy resztą będzie 749. Podzielmy tę resztę przez $2a$, to jest przez 100; iloraz będzie 7: i to jest wartością b. Wtedy $(2a + b)b$, czyli 107×7, to jest 749, jest liczbą, którą należy odjąć od reszty; a ponieważ teraz nie pozostaje żadna reszta, przeto wnosimy stąd, że $50 + 7$, czyli 57, jest szukanym pierwiastkiem kwadratowym.

Powiedzieliśmy wyżej, że a jest *największą* liczbą dziesiątek (czyli *największą* wielokrotną względem dziesięciu), której kwadrat jest mniejszy od 3200. W rzeczy samej: bezpośrednio widoczną jest rzeczą, że a nie może być *większą* wielokrotną względem dziesięciu. Ale nie może być także i *mniejszą*; — gdyż, jeżeliby to było możliwem, aby liczba dziesiątek była mniejszą, np. gdyby była x, wtedy $x + b$ byłoby mniejsze od a, zatem i kwadrat z $x + b$ byłby mniejszy od a^2, więc $x + b$ mniejsze od prawdziwego pierwiastku kwadratowego.

Gdyby pierwiastek składał się z trzech cyfr, wtedy niech a oznacza setki, a b — dziesiątki. Znalazłszy a i b jak wyżej, uważajmy dalej setki razem z dziesiątkami jako nową wartość a, i wynajdźmy nową wartość na b jedności.

268. Zera mogą być przy wykonywaniu powyższego działania opuszczone dla krótkości i całe działanie można wyrazić za pomocą następnego prawidła:

Nad każdą drugą cyfrą, zaczynając od cyfry, stojącej na miejscu jedności napiszmy kropkę; tym sposobem cała liczba zostanie podzielona na kolumny. Następnie znajdźmy największą liczbę, której kwadrat jest zawarty w pierwszej kolumnie: będzie to pierwsza cyfra pierwiastku. Kwadrat jej odejmijmy od pierwszej kolumny, i do reszty dopiszmy kolumnę drugą. Podzielmy tak otrzymaną ilość, opuszczając w niej ostatnią cyfrę, przez podwojoną, znalezioną dotąd część pierwiastku i dopiszmy iloraz i do pierwiastku i do dzielnika. Pomnóżmy następnie dzielnik wraz z tem, co było dopisane, przez część pierwiastku ostatnio znalezioną, i odejmijmy znowuż iloczyn od całej reszty. Jeżeli w liczbie danej będzie jeszcze więcej kolumn do złożenia, wtedy całe działanie musi być dalej w ten sposób prowadzone.

$\sqrt{3\dot{2}4\dot{9}} = 57$
25
107 | 749
749

269. Przykłady:

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczb: 132496 i 5322249.

$\sqrt{1\dot{3}2\dot{4}9\dot{6}} = 364$
9
66 | 424
| 396
724 | 2896
| 2896

$\sqrt{\dot{5}3\dot{2}2\dot{2}4\dot{9}} = 2307.$
4
43 | 132
| 129
4607 | 32249
| 32249

W pierwszym przykładzie, po znalezieniu pierwszej cyfry pierwiastku i dopisaniu do reszty drugiej kolumny, otrzymujemy 424; podług prawidła dzielimy 42 przez 6, dla otrzymania następnej cyfry pierwiastku; z podzielenia wypada 7, i to byłoby drugą cyfrą. Lecz mnożąc 67 przez 7, otrzymujemy na iloczyn 469, co jest większą liczbą, aniżeli 424. To pokazuje, że druga cyfra nie może być 7, ale jest mniejszą. Probujemy 6 — ponieważ próba się udaje, przeto 6 jest właściwą cyfrą. Ten przykład pokazuje, że niekiedy wypada probować kilka liczb przy oznaczaniu pewnej cyfry.

W drugim przykładzie powinien czytelnik zwrócić uwagę na to, że jedna cyfra pierwiastku wypadła zero.

270. Nie z każdej liczby całkowitej dodatniej można wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, t. j. nie każdą można rozłożyć na dwa czynniki równe. Wszystkie liczby, z których można wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, np. 1, 4, 9, 16 i t. d., znajdziemy na tabliczce mnożenia wzdłuż jednej z przekątnych. Pierwiastkiem jakiejkolwiek innej liczby, np. 2, 5 lub 8 nie może być nietylko liczba całkowita, ale też żaden ułamek. Bo gdyby pierwiastkiem liczby całkowitej n był jakiś ułamek, który po usunięciu z licznika i mianownika czynników wspólnych, przyjąłby postać $\frac{a}{b}$, to musiałoby być:

$$\frac{a^2}{b^2} = n.$$

Ale a i b nie mają czynników wspólnych, przeto a^2 nie może być podzielne przez b^2, i wyrażenie $\frac{a^2}{b^2}$ nie może być liczbą całkowitą. Jeżeli więc n nie jest kwadratem pewnej liczby całkowitej, to pierwiastku z niego wyciągnąć nie można.

Często jednak należy rozwiązywać zadania w rodzaju następującego: znaleść bok kwadratu, którego powierzchnia wynosi 60 metrów kwadratowych. 60 nie jest kwadratem zupełnym żadnej liczby całkowitej, a zatem, jak już wiemy, napróżnobyśmy także szukali i takiego ułamka, którego kwadrat byłby równy 60. Weźmy kwadrat, którego bok jest równy 7 m.; powierzchnia jego będzie 49 m. kwadr.; kwadrat, mający bok długości 8 m. będzie miał 64 m. kw. powierzchni; pierwszy będzie o 11 m. kw. zamały, drugi o 4 zawielki. Biorąc więc bok kwadratu szukanego równym 7 lub 8 m. popełnimy pewien błąd.

W miernictwie praktycznem jeżeli mówimy, że kwadrat ma 60 m. kw. powierzchni, to wyrażamy przez to, że mierzymy tylko metry całkowite, że więc powierzchnia kwadratu jest większa od 59,5 ale mniejsza od 60,5 m. kw.; gdybyśmy chcieli zaznaczyć, że i dziesiąte i setne części metra są zmierzone, napisalibyśmy 60,00, co oznacza, że wielkość ta jest większa od 59,995 ale mniejsza od 60,005; w praktyce więc zadanie będzie rozwiązane, jeżeli znajdziemy bok kwadratu, którego powierzchnia różni się od powierzchni danej o wielkość mniejszą od połowy najmniejszej jednostki, użytej do mierzenia.

I tak, jeżeli mierzymy powierzchnie z dokładnością do 1 m. kw., to obie liczby: 7,74 i 7,75 będą w zupełności odpowiadały warunkom zadania, gdyż ich kwadraty: 59,9076 i 60,0625 różnią się od 60 mniej aniżeli o 0,5. Długość boku znaleźliśmy przytem z dokładnością do $\frac{1}{100}$ metra.

271. Wogóle działanie wyciągania pierwiastku określimy w ten sposób.

Wyciągnąć pierwiastek stopnia p^{go} z a z dokładnością do $\frac{1}{n}$ znaczy znaleść taki ułamek $\frac{x}{n}$, ażeby:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^p < a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^p.$$

W przykładzie powyżej rozpatrywanym jest $a = 60$, $p = 2$, $\frac{x}{n} = 7.74$ czyli $x = 774$, $n = 100$.

Pomnożywszy powyższą nierówność przez n^p, znajdziemy:

$$x^p < n^p a < (x+1)^p.$$

Zadanie więc rozwiążemy w taki sposób: pomnożymy liczbę daną a przer n^p i znajdziemy największą liczbę całkowitą, której p^{ta} potęga jest mniejsza od $n^p a$.

W danym przykładzie mnożymy 60 przez $n^2 = 10000$, co daje 600000; największą liczbą całkowitą, której kwadrat jest mniejszy od 600000, będzie 774.

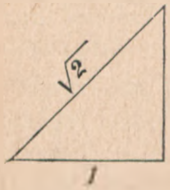
Powyższe określenie przedstawia jednak tę niedogodność, że sam pierwiastek nie jest tutaj ściśle oznaczony, co utrudnia wypowiadanie twierdzeń ogólnych o pierwiastkach. Ażeby tę niedogodność usunąć, wprowadzamy nowy rodzaj liczb. Podobnie jak dla uogólnienia odejmowania i dzielenia okazała się potrzeba wprowadzenia liczb ujemnych i ułamkowych, tak samo i tutaj wprowadzamy liczby takie, których potęgi mają być ściśle równe liczbom danym. Liczby takie, dla odróżnienia od używanych dotychczas, nazwiemy *niewymiernemi*. Odtąd więc wyrażenia takie jak $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{60}$, $\sqrt{0{,}4}$ będą miały dla nas wartości całkiem oznaczone, i znajdziemy sposoby wyrażania ich za pomocą ułamków z każdem żądanem przybliżeniem, biorąc n odpowiednio wielkie*).

*) Błąd jaki popełniamy biorąc $x:n$ zamiast $\sqrt[p]{a}$, t. j. różnica $\sqrt[p]{a} - x:n$, jest mniejsza od $1:n$, ponieważ:

$$\frac{x}{n} < \sqrt[p]{a} < \frac{x}{n} + \frac{1}{n},$$

a że $1:n$ jest tem mniejsze, im większe n, przeto obierając n dostatecznie wielkie, uczynimy błąd tak małym, jak tylko zechcemy.

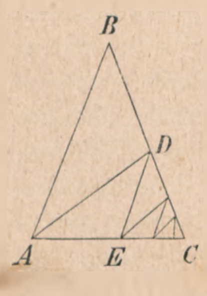
Graficznie ilość niewymierną można przedstawić tak samo za pomocą odcinka, jak ilość wymierną. Wogóle nie można rozstrzygnąć, czy długość odcinka danego wyraża się wymierną czy niewymierną liczbą jednostek, gdyż nigdy nie możemy mierzyć z bezwzględną ścisłością. Ale nieraz sam sposób, w jaki odcinek powstał, wymaga, ażeby długość jego uważać za niewymierną. Naprzykład w trójkącie prostokątnym, w którym obie przyprostokątne są równe jedności, przeciwprostokątna nazasadzie twierdzenia Pytagorasa będzie równa:



$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

a zatem będzie niewymierną względem przyprostokątnych.

Jako drugi przykład weźmy trójkąt równoramienny ABC, mający przy wierzchołku kąt 36°, a więc przy podstawie 72°. Poprowadźmy dwusieczną AD kąta BAC. Trójkąty ADB i CAD są równoramienne, a zatem $BD = AD = AC$. W ten sposób odcięliśmy więc na ramieniu trójkąta odcinek równy podstawie. DC jest mniejsze od AC, ponieważ leży w trójkącie CAD naprzeciwko kąta mniejszego. W podobny więc sposób możemy, prowadząc dwusieczną kąta $ADC(=72^0)$, odciąć na AC odcinek $AE = DC$ i t. d. Działanie to nie skończy się nigdy, a zatem boki AC i BC są niewspółmierne. Jakąkolwiek więc obralibyśmy jednostkę długości — zawsze długość przynajmniej jednego z nich wyrazi się liczbą niewymierną.



272. Prawidło na wyciąganie pierwiastku kwadratowego z ułamka dziesiętnego wypada z § 268. Należy tu jednak zauważyć, że przy podnoszeniu do kwadratu ułamka dziesiętnego otrzymujemy zawsze *parzystą* liczbę cyfr dziesiętnych w kwadracie, że zatem nie można dokładnie wyciągnąć

pierwiastku kwadratowego z żadnego ułamka dziesiętnego, który w najprostszej swojej postaci, ma *nieparzystą* liczbę cyfr dziesiętnych.

Pierwiastek kwadratowy z 32,49 jest jedną dziesiątą częścią pierwiastku kwadratowego z 100 $\times$ 32,49, — czyli z 3249. Podobnież: pierwiastek kwadratowy z 0,003249 jest jedną tysiączną częścią pierwiastku kwadratowego z 1000000 $\times$ 0,003249, czyli z 3249. Stąd możemy wyprowadzić następne prawidło na wyciąganie pierwiastku kwadratowego z ułamka dziesiętnego:

Należy oznaczyć kropką każdą drugą cyfrę danej liczby poczynając od cyfry, stojącej na miejscu jedności, i idąc tak na lewo, jak i na prawo od niej. Następnie wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z całej liczby, jakby z całkowitej i oddzielić na dziesiętne w otrzymanym wypadku tyle cyfr, ile było odznaczonych kolumn w części dziesiętnej danej liczby.

Zwracamy, tutaj szczególną uwagę uczącego się na znaczenie słów: *poczynając od cyfry, stojącej na miejscu jedności.*

273. Przy wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z liczby całkowitej, jeżeli otrzymamy jeszcze resztę, doszedłszy do cyfry stojącej na miejscu jedności, to reszta ta jest znakiem, ża dana liczba nie ma pierwiastku, dającego się dokładnie wyrazić. Możemy jednak oznaczyć go z takim stopniem przybliżenia, jak tylko chcemy, przypuszczając, że na końcu danej liczby znajduje się przecinek, dopisując za nim jakąkolwiek parzystą liczbę zer i prowadząc dalej działanie. Tym sposobem otrzymaną część dziesiętną pierwiastku należy dodać do znalezionej już poprzednio części całkowitej.

Podobnież, jeżeli ułamek dziesiętny nie ma pierwiastku kwadratowego, dającego się dokładnie oznaczyć, wtedy możemy do niego dopisać zera, i dalej prowadzić działanie, posuwając przybliżenie tak daleko, jak chcemy.

274. W podanym niżej przykładzie, wyciąganie pierwiastku kwadratowego z 0,4 jest doprowadzone do siedmiu cyfr dziesiętnych.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{0,\dot{4}0\dot{0}0\ldots\ldots} = 0,6324555} \\
 & 36 \\
123 & 400 \\
 & 369 \\
1262 & 3100 \\
 & 2524 \\
12644 & 57600 \\
 & 50576 \\
126485 & 702400 \\
 & 632425 \\
1264905 & 6997500 \\
 & 6324525 \\
12649105 & 67297500 \\
 & 63245525 \\
 & 4051975
\end{array}
$$

275. Jak z liczb, podobnie i z wyrażeń algebraicznych niezawsze można wyciągnąć pierwiastek kwadratowy *dokładnie*. Niekiedy wypada nam rozwiązać zadanie tego rodzaju: znaleść cztery wyrazy pierwiastku kwadratowego z $1 - 2x$.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{1-2x} = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}} \\
 & 1 \\
2 - x & -2x \\
 & \mp 2x \pm x^2 \\
2 - 2x - \frac{x^2}{2} & -x^2 \\
 & \mp x^2 \pm x^3 \pm \frac{x^4}{4} \\
2 - 2x - x^2 - \frac{x^3}{2} & -x^3 - \frac{x^4}{4} \\
 & \mp x^3 \pm x^4 \pm \frac{x^5}{2} \pm \frac{x^6}{4} \\
 & -\frac{5x^4}{4} - \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{4}
\end{array}
$$

Tym sposobem otrzymaliśmy jeszcze na resztę $-\frac{5x^4}{4} - \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{4}$ po znalezieniu czterech wyrazów pierwiastku kwadratowego z $1 - 2x$. Z tego wypada, że:

$$\left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right)^2 = 1 - 2x + \frac{5x^4}{4} + \frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{4}.$$

276. Przechodzimy teraz do sposobu wyciągania pierwiastku sześciennego z wielomianów.

Pierwiastek sześcienny z $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ jest $a + b$; zastanawiając się tutaj nad sposobem, w jaki $a + b$ zostaje utworzone z $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, dojdziemy do ogólnego prawidła na wyciąganie pierwiastku sześciennego z każdego wielomianu.

Uprządkujmy najprzód wyrazy podług potęg jednej i tej samej głoski a: wtedy pierwszym wyrazem będzie a^3, a jego pierwiastkiem sześciennym będzie a: — i to jest pierwszy wyraz szukanego pierwiastku.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b} \\
\multicolumn{2}{l}{-a^3} \\
3a^2 & 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 & -3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3
\end{array}
$$

Odejmijmy następnie sześcian tego wyrazu pierwszego, czyli a^3, od całego wyrażenia i dopiszmy resztę : $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Podzielmy $3a^2b$ przez $3a^2$: — ilorazem będzie b, i ono stanowi drugi wyraz szukanego pierwiastku. Odejmijmy dalej $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ od reszty, i tym sposobem cały sześcian $a + b$ zostanie odjęty. To właśnie kończy działanie w obecnym przypadku.

Gdyby było więcej wyrazów, wtedy należałoby postępować z $a + b$ tak, jak postępowaliśmy podrzednio z a; sześcian tego wyrażenia, to jest $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, był już odjęty od danego wielomianu, należy więc podzielić resztę przez $3(a + b)^2$ dla wynalezienia nowego wyrazu, i tak dalej.

277. Przy wyciąganiu pierwiastku sześciennego z bardziej złożonych wielomianów, a równie i z liczb, dogodną jest rzeczą rozłożyć rachunki działania, pokazanego w poprzednim paragrafie, w trzy kolumny jak następuje:

$$\begin{array}{l|l|l}
3a + b; & 3a^2 & \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b \\
 & \quad (3a + b)b & a^3 \\
\cline{2-2}
 & 3a^2 + 3ab + b^2 & \overline{\quad 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \\
 & & \quad 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
\end{array}$$

Objaśnienie: Znajdujemy najprzód pierwszy wyraz pierwiastku, to jest a; następnie piszemy a^3 pod danem wyrażeniem w trzeciej kolumnie i odejmujemy je. Piszemy potem $3a$ w pierwszej kolumnie, a $3a^2$ w drugiej; — dzielimy $3a^2b$ przez $3a^2$, i otrzymujemy iloraz b. Dodajemy b do wyrażenia pierwszej kolumny; mnożymy następnie to, co otrzymamy w tej pierwszej kolumnie, przez b, iloczyn piszemy w drugiej kolumnie, i dodajemy go do tego, co już w tejże kolumnie się znajduje, otrzymujemy $3a^2 + 3ab + b^2$. Mnożymy to ostatnie wyrażenie przez b; otrzymujemy $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, który to iloczyn należy umieścić w trzeciej kolumnie i odjąć Tym sposobem dokończyliśmy działanie odejmowania $(a + b)^3$ od wyrażenia danego. Gdyby było więcej wyrazów, wtedy należałoby tożsamo działanie prowadzić dalej.

278. Przy wykonywaniu tego działania w dalszym ciągu, należy dodawać do liczby pierwszej kolumny taką liczbę, aby po dodaniu otrzymać *potrojoną część pierwiastku, już znalezioną.* W tym celu postępujemy tak: mamy już w pierwszej kolumnie $3a + b$; umieszczamy $2b$ pod b i dodajemy; — wtedy otrzymamy $3a + 3b$, czyli potrojoną część już znalezioną. Nadto, do liczb drugiej kolumny wypada nam dodać taką liczbę, aby otrzymać *potrojony kwadrat tej części pierwiastku, która już jest znalezioną.* To znowuż wynajdujemy w ten sposób:

$$\begin{array}{r}
3a + b \\
+ 2b \\
\hline
3a + 3b
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
(3a + b)\,b \\
3a^2 + 3ab + b^2 \\
+ b^2 \\
\hline
3a^2 + 6ab + 3b^2
\end{array}$$

w drugiej kolumnie mamy już $(3a + b)\,b$ a pod tą liczbą $3a^2 + 3ab + b^2$;— umieśćmy jeszcze b^2 poniżej i dodajmy liczby zawarte w trzech ostatnich wierszach, wtedy otrzymamy $3a^2 + 6ab + 3b^2$, co jest właśnie trzy razy wziętym $(a + b)^2$, czyli potrojonym kwadratem znalezionej już części pierwiastku.

279. Przykład: Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z wyrażenia:

$$8x^6 - 36x^5 + 102x^4 - 171x^3 + 204x^2 - 144x + 64.$$

Działanie:

I)
$$\begin{array}{r}
6x^2 - 3x \\
- 6x \\
\hline
6x^2 - 9x + 4
\end{array}$$

II)
$$\begin{array}{r}
12x^4 \\
-3x\,(6x^2 - 3x) \\
\hline
12x^4 - 18x^3 + 9x^2 \\
9x^2 \\
\hline
12x^4 - 36x^3 + 27x^2 \\
4\,(6x^2 - 9x + 4) \\
\hline
12x^4 - 36x^3 + 51x^2 - 36x + 16
\end{array}$$

III)
$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{8x^6 - 36x^5 + 102x^4 - 171x^3 + 204x^2 - 144x + 64} = 2x^2 - 3x + 4 \\
- 8x^6 \\
\hline
\quad - 36x^5 + 102x^4 - 171x^3 + 204x^2 - 144x + 64 \\
\quad \mp 36x^5 \pm 54x^4 \mp 27x^3 \\
\hline
\qquad\qquad 48x^4 - 144x^3 + 204x^2 - 144x + 64 \\
\qquad\quad - 48x^4 \mp 144x^3 \pm 204x^2 \mp 144x \pm 64.
\end{array}$$

Pierwiastek sześcienny z $8x^6$ jest $2x^2$; i to będzie pierwszym wyrazem szukanego pierwiastku: podpisujemy $8x^6$ pod danem wyrażeniem w trzeciej kolumnie i odejmujemy ten wyraz.

Następnie umieszczamy potrojone $2x^2$ w kolumnie pierwszej, a potrojony kwadrat $2x^2$ w kolumnie drugiej; to jest piszemy $6x^2$ w pierwszej, a $12x^4$ w drugiej kolumnie. Dalej dzielimy $-36x^5$ przez $12x^4$, i otrzymujemy tym sposobem iloraz $-3x$, który będzie drugim wyrazem pierwiastku.

Następnie dopisujemy tenże wyraz do pierwszej kolumny, i to wyrażenie, które teraz znajdować się będzie w pierwszej kolumnie, czyli $6x^2 - 3x$, mnożymy przez $-3x$, tak znaleziony iloczyn umieszczamy pod wyrażeniem, będącem w drugiej kolumnie i dodajemy go do tegoż wyrażenia: — otrzymamy tym sposobem $12x^4 - 18x^3 + 9x^2$. Mnożymy dalej to ostatnie wyrażenie przez $-3x$, podpisujemy je pod resztą w trzeciej kolumnie i odejmujemy. Otrzymamy wtedy w trzeciej kolumnie resztę; a część pierwiastku już znaleziona będzie $2x^2 - 3x$. Teraz należy w kolumnie pierwszej i drugiej wykonać rachunki, pokazane w § 278. W tym celu podpisujemy podwojone $-3x$ to jest $-6x$, w pierwszej kolumnie, i dodajemy te dwa wiersze; — otrzymujemy przez to $6x^2 - 9x$, i to stanowi potrojoną część pierwiastku już znalezioną. Podobnież podpisujemy kwadrat $-3x$, czyli $9x^2$, w drugiej kolumnie, i dodajemy trzy ostatnie wiersze w tejże kolumnie; — otrzymujemy $12x^4 - 36x^3 + 27x^2$, i to jest potrojonym kwadratem tej części pierwiastku, która już jest znalezioną.

Po wykonaniu tych działań dzielimy resztę, znajdującą się w pierwszej kolumnie, przez wyrażenie poprzednio otrzymane, i w ten sposób znajdujemy 4, jako ostatni wyraz pierwiastku; z nim znowuż postępujemy tak jak z poprzednimi. Mianowicie: dołączamy ten wyraz do pierwszej kolumny, i mnożymy tak otrzymane wyrażenie w tejże kolumnie, to jest: $6x^2 - 9x + 4$; przez 4; iloczyn umieszczamy pod wyrażeniem będącem w drugiej kolumnie, dodajemy go do tegoż wyrażenia: otrzymujemy w ten sposób: $12x^4 - 36x^3 + 51x^2 - 36x + 16$; mnożymy to ostatnie przez 4, podpisujemy iloczyn pod resztą w trzeciej kolumnie i odejmujemy go. Ponieważ teraz nie pozostaje żadnej reszty, przeto wnosimy stąd, że $2x^2 - 3x + 4$ jest szukanym pierwiastkiem sześciennym.

280. Wyłożony poprzednio sposób wyciągania pierwiastku sześciennego z wyrażeń algebraicznych prowadzi nas

do podania sposobu wyciągania pierwiastku sześciennego z jakiejkolwiek liczby.

Pierwiastek sześcienny z 1000 jest 10, pierwiastek sześcienny 1000000 jest 100; stąd wypada, że pierwiastek sześcienny z liczby mniejszej od 1000 jest jednocyfrowy; pierwiastek sześcienny z liczby, zawartej pomiędzy 1000 i 1000000 składa się z dwóch cyfr, i t. d. Jeżeli więc nad każdą trzecią cyfrą danej liczby, napiszemy punkt, zaczynając od cyfry, stojącej na miejscu jedności, wtedy liczba punktów pokaże liczbę cyfr w pierwiastku sześciennym.

Tak naprzykład pierwiastek sześcienny z $40\dot{5}22\dot{4}$ składa się z dwóch cyfr, a pierwiastek sześcienny z $1\dot{2}81\dot{2}90\dot{4}$ składa się z trzech cyfr.

Przypuśćmy, że chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 274625.

I-a kol.	II-a kol.	III-cia kol.
180 + 5	10800	
	925	$\sqrt[3]{27\dot{4}62\dot{5}} = 60 + 5$
	11725	216000
		58625
		58625

Oznaczmy najprzód punktami odpowiednie cyfry, podług prawidła; — pokazuje się z tego, że pierwiastek składać się będzie z dwóch cyfr. Niech $a + b$ będzie szukanym pierwiastkiem, gdzie a oznacza wartość cyfry, stojącej na miejscu dziesiątków, a b wartość cyfry, stojącej na miejscu jedności. Wtedy a musi być największą wielokrotnością dziesięciu, której sześcian jest mniejszy od 274000; — jest to 60. Podpisujemy sześcian 60, to jest 216000, w trzeciej kolumnie pod daną liczbą, i odejmujemy go od tejże liczby. Umieszczamy potrojone 60, to jest 180, w pierwszej kolumnie, i potrojony kwadrat 60, to jest 10800, w drugiej kolumnie. Resztę, otrzymaną w trzeciej kolumnie, dzielimy przez liczbę, będącą w drugiej kolumnie, to jest dzielimy 58625 przez 10800; otrzymujemy stąd 5, i to jest wartością *b*. Dodajemy 5 do pierwszej kolumny i mnożymy tę sumę przez 5, to jest mnożymy 185 przez 5; otrzymujemy z tego 925, co umieszczamy w drugiej kolumnie i dodajemy do liczby, która już się tam znajduje Tym sposobem znajdujemy 11725; co mnożymy przez 5, umieszczamy iloczyn w trzeciej kolumnie i odejmujemy. Reszta jest 0, zatem 65 jest szukanym pierwiastkiem sześciennym.

Zera na końcu mogą być dla krótkości poopuszczane, i całe działanie ostatecznie przedstawiać się będzie w ten sposób:

185	108	
	925	$\sqrt[3]{274625} = 65$
	11725	216
		58625
		58625

281. Przykład. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby 109215352.

I-a kol.	II-ga kol.	III-cia kol.
127	48	$\sqrt[3]{109215352} = 478$
14	889	64
1418	5689	45215
	49	39823
	6627	5392352
	11344	5392352
	674044	

Po otrzymaniu dwóch pierwszych cyfr pierwiastku, mianowicie 47, obliczamy pierwszą i drugą kolumnę, sposobem, wyłożonym w § 278. Mianowicie umieszczamy podwojone 7 pod liczbą pierwszej kolumny, i dodajemy oba wiersze, co nam daje 141.; następnie podpisujemy kwadrat 7 pod liczbami drugiej kolumny i dodajemy trzy ostatnie wiersze, co znowuż daje 6627. Dalej działanie jest prowadzone jak poprzednio. Pierwiastek sześcienny jest 478.

Przy wykonywaniu działania, odnoszącego się do tego przykładu, mogło się wydawać, że drugą cyfrą pierwiastku jest 8 lub nawet 9; lecz przez probowanie każdej z nich, okazuje się, że one są zbyt wielkie. Podobnie jak i przy wyciąganiu pierwiastku kwadratowego może się czasami przytrafić, że wypada nam próbować zbyt wielkich cyfr, szczególniej przy oznaczaniu pierwszych cyfr pierwiastku.

282. Przykład. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 8653002877.

605	1200	$\sqrt[3]{8653002877} = 2053.$
10	3025	8
6153	123025	653002
	25	615125
	126075	37877877
	18459	37877877
	12625959	

W tym przykładzie uczący się powinien zwrócić uwagę na zero, które się otrzymuje jako jednę z cyfr pierwiastku.

283. Jeżeli pierwiastek ma pewną liczbę cyfr dziesiętnych, wtedy sześcian mieć będzie trzy razy więcej tychże cyfr; z tego powodu w liczbie, mającej cyfry dziesiętne i wyrażonej w najprostszej postaci, liczba tychże cyfr dziesiętnych powinna być wielokrotną względem *trzech*, jeżeli dana liczba jest dokładnym sześcianem. W pierwiastku, zatem, sześciennym z takiej liczby, liczba cyfr dziesiętnych będzie trzy razy mniejszą, aniżeli w danej liczbie. Stąd, jeżeli liczba dana, z której chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny, zawiera ułamek dziesiętny, wtedy oznaczamy punktem *cyfrę, stojącą na miejscu jedności*, i każdą trzecią cyfrę licząc w prawą i lewą stronę od tejże cyfry jedności, i następnie postępujemy tak, jak przy wyciąganiu pierwiastku z liczby całkowitej. Liczba punktów, napisanych nad częścią dziesiętną danej liczby, pokaże nam liczbę cyfr dziesiętnych w piarwiastku sześciennym.

284. Przykład. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 14102, 327296.

64	12	
8	256	$\sqrt[3]{14\dot{1}0\dot{2},32\dot{7}29\dot{6}} = 24,16.$
721	1456	8
2	16	6102
7236	1728	5824
	721	278327
	173521	173521
	1	104806296
	174243	104806296
	43416	
	17467716	

285. Jeżeli dana liczba, czy to będzie całkowitą, czy też ułamkiem dziesiętnym, nie ma dokładnego pierwiastku sześciennego, wtedy możemy do niej dopisać zera i oznaczyć pierwiastek sześcienny z przybliżeniem do jakiegokolwiek stopnia.

W następującym przykładzie jest wykonane wyciąganie pierwiastku sześciennego z 0,4 do czterech cyfr dziesiętnych:

213	147	$\sqrt[3]{0,400\ldots} = 0,7368.$
6	639	343
2196	15339	57000
12	9	46017
22088	15987	10983000
	13176	9671256
	1611876	1311744000
	36	1301484032
	1625088	10259968
	176704	
	162685504	

PRZYKŁADY XXIX.

Znaleść wartość następujących wyrażeń:

1. $\sqrt{9a^4b^4}$. 2. $\sqrt[3]{8a^3b^3}$. 3. $\sqrt[3]{-64a^3b^6}$.

4. $\sqrt{\frac{25a^2b^2}{49c^4}}$ 5. $\sqrt[3]{-\frac{216a^3b^9}{125c^6}}$.

Znaleść pierwiastki kwadratowe następujących wyrażeń:

6. $16a^2+40ab+25b^2$. 7. $49a^4-84a^2b+36b^2$.

8. $\frac{9x^4-24x^2+16}{4x^2-12x+9}$. 9. x^4-4x^3+8x+4.

10. $x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$.

Znaleść pierwiastki stopnia czwartego z następujących wyrażeń:

11. $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$.

12. $\{x^4-2(a+b)x^3+(a^2+4ab+b^2)x^2-2ab(a+b)x+a^2b^2\}^2$.

Znaleść pierwiastki kwadratowe następujących liczb:

13. 1156. 14. 15129.

15. 3080,25. 16. 4981,5364.

Wyciągnąć pierwiastki kwadratowe z każdej z następnych liczb do pięciu cyfr dziesiętnych:

17. 0,9. 18. 129. 19. 347,259.

Znaleść pierwiastki sześcienne następujących wyrażeń:

20. $x^3-3x^2(a+b)+3x(a+b)^2-(a+b)^3$.

21. $x^6-3ax^5+5a^3x^3-3a^5x-a^6$.

Znaleść pierwiastki sześcienne z następujących liczb:

22. 19683. 23. 2628072. 24. 0,220348864.

XXX.

Wykładniki.

286. W paragrafie 16, określiliśmy znaczenie *wykładnika*; i stosownie do tego określenia, wykładnik dotąd miał dla nas znaczenie zawsze liczby naturalnej, t. j. dodatniej i całkowitej. Rozszerzymy teraz określenie wykładnika, nadając znaczenie wykładnikowi ułamkowemu i wykładnikowi ujemnemu.

287. *Jeżeli m i n oznaczają jakiekolwiek liczby całkowite i dodatnie, wtedy:*

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Prawdziwość tego twierdzenia była już pokazaną w paragrafie 57, lecz nie będzie zbytecznem powtórzyć tutaj to dowodzenie:

$$a^m = a \times a \times a \times \ldots\ldots m \text{ razy, na zasadzie § 16;}$$

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots n \text{ razy, na zasadzie § 16;}$$

przeto:

$$a^m \times a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a \times a \times a \times \ldots\ldots m+n \text{ razy,}$$

czyli, na zasadzie paragrafu 16:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Podonież, jeżeli p jest także liczbą całkowitą i dodatnią:

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p};$$

i tak dalej.

288. Jeżeli m i n są liczbami całkowitemi i dodatniemi, a m jest większe od n, wtedy mamy, na zasadzie § 287:

$$a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m;$$

skąd:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

To również było już dowiedzione w paragrafie 70.

289. Ponieważ wykładniki ułamkowe i wykładniki ujemne nie były dotąd określone, przeto możemy je określić w taki sposób, w jaki tylko chcemy; i najdogodniejszą rzeczą będzie nadać tym wykładnikom takie określenie, że przy nich zasadniczy związek $a^m \times a^n = a^{m+n}$ *zawsze mieć będzie miejsce, jakiekolwiekby były m i n.*

Naprzykład: przypuśćmy, że chcemy poznać znaczenie $a^{\frac{1}{2}}$.

Podług przypuszczenia powinno być:

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a.$$

Przeto $a^{\frac{1}{2}}$ musi być taką liczbą, która pomnożona przez siebie samą powinna dać na iloczyn a; lecz *pierwiastek kwadratowy* z a jest podług określenia taką liczbą; — zatem $a^{\frac{1}{2}}$ musi mieć toż samo znaczenie co i pierwiastek kwadratowy z a, to jest $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Dalej: przypuśćmy, że chcemy poznać znaczenie $a^{\frac{1}{3}}$.

Podług przypuszczenia powinno być:

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a.$$

Stąd wypada, tak jak poprzednio, że $a^{\frac{1}{3}}$ musi mieć toż samo znaczenie, co i pierwiastek sześcienny z a, to jest: $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.

Dalej jeszcze przypuśćmy, że chcemy poznać znaczenie $a^{\frac{3}{4}}$.

Podług przypuszczenia powinno być:

$$a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^3;$$

przeto: $$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}.$$

Te przykłady dają uczącemu się pojęcie o tem, co należy rozumieć przez jakikolwiek wykładnik ułamkowy; z tem wszystkiem podamy w dwóch następnych paragrafach ogólne określenie tegoż wykładnika.

290. *Znaleść jakie ma znaczenie* $a^{\frac{1}{n}}$, *gdzie n jest jakąkolwiek liczbą całkowitą i dodatnią.*

Na zasadzie przypuszczenia:

$$a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots\ n \text{ czynników} =$$
$$= a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots n \text{ wyrazów}} = a^1 = a;$$

przeto $a^{\frac{1}{n}}$ musi mieć toż samo znaczenie, co i pierwiastek potęgi n-tej z a, to jest:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

291. *Znaleść, jakie ma znaczenie* $a^{\frac{m}{n}}$, *gdzie m i n są jakiemikolwiek liczbami całkowitemi i dodatniemi.*

Na zasadzie przypuszczenia:

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times \ldots n \text{ czynników} =$$
$$= a^{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \ldots n \text{ wyrazów}} = a^m;$$

przeto $a^{\frac{m}{n}}$ musi być pierwiastkiem potęgi n z a^m

czyli: $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Stąd widzimy, że $a^{\frac{m}{n}}$ oznacza pierwiastek potęgi n^{tej} z a podniesionego do potęgi m^{tej}; to jest w wykładniku ułamkowym licznik oznacza wykładnik potęgi, a mianownik wykładnik pierwiastku.

292. Podług powyższego znamy znaczenie każdego wykładnika dodatniego czy to całkowitego, czy też ułamkowego; pozostaje nam teraz znaleść znaczenie wykładnika odjemnego.

Naprzykład: chcemy poznać jakie ma znaczenie a^{-2}.

Podług założenia:

$$a^3 \times a^{-2} = a^{3-2} = a^1 = a,$$

przeto: $$a^{-2} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}.$$

Podamy teraz określenie w ogólności.

293. *Znaleść znaczenie* a^{-n}, *gdzie n jest jakąkolwiek liczbą dodatnią całkowitą lub ułamkową.*

Podług założenia, jakiekolwiekby było m, powinniśmy mieć:

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}.$$

Przypuśćmy, że m jest dodatnie i większe od n: wtedy będzie:

$$a^{m-n} \times a^n = a^m,$$

skąd: $$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

Aby wypadek ten dogodnie wyrazić słowami, określimy najprzód znaczenie wyrazu *odwrotny*. Pewna ilość nazywa się *odwrotnością* drugiej, gdy iloczyn tych dwóch ilości jest równy jedności. Tak np. x jest *odwrotnością* $\frac{1}{x}$, lub ilością *odwrotną* względem $\frac{1}{x}$.

Podług tego a^{-n} jest *odwrotnością* lub *ilością odwrotną* względem a^n. Wypadek ten możemy przedstawić pod jedną z trzech następujących postaci:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad a^n \times a^{-n} = 1.$$

294. Z tego znaczenia, jakie nadaliśmy wykładnikowi ujemnemu wypada, że $a^m : a^n = a^{m-n}$ i w tym przypadku, gdy m jest mniejsze od n, równie jak i w tym, gdy m jest większe od n. W rzeczy samej: przypuśćmy że m jest mniejsze od n; wtedy:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Przypuśćmy teraz, że $m = n$, wówczas $a^m : a^n$ jest oczywiście $= 1$, a $a^{m-n} = a^0$. Ten ostatni symbol nie był jeszcze rozważany i nie otrzymał żadnego określenia; tym sposobem możemy mu nadać takie znaczenie, jakie najnaturalniej przedstawia się samo. Dla tego możemy powiedzieć, że $a^0 = 1$.

295. Aby ustanowić zupełną teoryę wykładników, należałoby podać dowodzenia niektórych twierdzeń, wychodzących poza obręb niniejszego dziełka. Lecz te twierdzenia są tak prostymi wnioskami z określeń i własności ułamków, że czytelnik nie znajdzie żadnych trudności w zastosowaniu ich w tych przypadkach, które mogą mu się przytrafić. Z tego powodu pozostawiamy zupełny wykład obszerniejszym dziełom o algebrze. a tutaj podamy tylko niektóre przykłady.

296. Jeżeli m i n są liczbami całkowitemi dodatniemi, wtedy wiemy, że: $(a^m)^n = a^{mn}$ (patrz § 240).

Toż samo mieć będzie miejsce, gdy m i n nie będą liczbami całkowitemi dodatniemi. Naprzykład:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}}.$$

W rzeczy samej: niech $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = x$. Wtedy podnosząc obie strony do potęgi 4-ej będzie: $a^{\frac{1}{3}} = x^4$; następnie zaś podnosząc obie strony tej równości do potęgi trzeciej, otrzymamy: $a = x^{12}$; przeto $x = a^{\frac{1}{12}}$, co właśnie było do pokazania.

297. Jeżeli n jest liczbą całkowitą i dodatnią, wiemy, że: $a^n \times b^n = (ab)^n$. Toż samo mieć będzie miejsce, gdy n nie jest liczbą całkowitą i dodatnią.

Naprzykład: $a^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} = (ab)^{\frac{1}{3}}$. Gdyż jeżelibyśmy obie strony podnieśli do potęgi trzeciej: wtedy z jednej i drugiej otrzymalibyśmy ab; tym sposobem każda z nich jest pierwiastkiem sześciennym z ab.

W podobny sposób mieć będziemy:

$$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} \times c^{\frac{1}{n}} \times \ldots = (abc \ldots .)^{\frac{1}{n}}.$$

Przypuśćmy teraz, że tych ilości $a, b, c \ldots .$ jest m, i że wszystkie one są równe a; wtedy z powyższej równości będzie:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{czyli:}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Stąd wypada, że aby pierwiastek potęgi n-tej z a podnieść do potęgi m, należy tylko ilość podpierwiastkową podnieść do potęgi m, pozostawiając resztę bez zmiany.

298. Ponieważ ułamek może przyjąć rozmaite postaci, nie zmieniając wszakże swojej wartości, przeto łatwo przedstawić pod rozmaitemi postaciami i ilość z wykładnikiem ułamkowym nie zmieniając jej wartości. Tak naprzykład: ponieważ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ przeto możemy wnieść, że $a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}}$ i tak jest w rzeczy samej. Gdyż podnosząc obie te ilości do potęgi szóstej, znajdziemy z jednej i z drugiej a^4, czyli każda z nich jest pierwiastkiem potęgi szóstej z a^4.

299. Dajemy teraz kilka przykładów działań algebraicznych, do których wchodzą wykładniki ułamkowe i ujemne.

Pomnożyć: $a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{3}}$ przez $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{3}}$.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6};\quad \frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{13}{12};\quad \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1,$$

przeto:

$$a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}} b^{\frac{13}{12}} c.$$

Podzielić: $x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{2}{3}}$ przez $x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}}$.

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\quad \frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2};$$

przeto: $x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}$.

Pomnożyć: $x + x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$, przez: $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} - x^{-1}$

$$\begin{array}{l}
x + x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} \\
x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} - x^{-1} \\
\hline
x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}} + 1 \\
\quad + x^{\frac{2}{3}} + 1 + x^{-\frac{2}{3}} \\
\qquad\quad - 1 - x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{4}{3}} \\
\hline
x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} + 1 - x^{-\frac{4}{3}}.
\end{array}$$

Tutaj mamy najprzód: $x^{\frac{1}{3}} \times x = x^{\frac{1}{3}+1} = x^{\frac{4}{3}}$; następnie: $x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$; $x^{\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{1}{3}} = x^0 = 1$ i tak dalej.

Podzielić:

$x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{1}{6}} y^{-\frac{1}{3}} - y^{-\frac{1}{2}}$, przez: $x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} y^{-\frac{1}{6}} + y^{-\frac{1}{3}}$.

$$\begin{array}{l|l}
x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{1}{6}} y^{-\frac{1}{3}} - y^{-\frac{1}{2}} & x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} y^{-\frac{1}{6}} + y^{-\frac{1}{3}} \\
\cline{2-2}
-x^{\frac{1}{2}} \mp 2x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{6}} \pm x^{\frac{1}{6}} y^{-\frac{1}{3}} & x^{\frac{1}{6}} - y^{-\frac{1}{6}}. \\
\cline{1-1}
\quad - x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{6}} + 2x^{\frac{1}{6}} y^{-\frac{1}{3}} - y^{-\frac{1}{2}} & \\
\quad \mp x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{6}} \pm 2x^{\frac{1}{6}} y^{-\frac{1}{3}} \mp y^{-\frac{1}{2}} & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

PRZYKŁADY XXX.

Znaleść wartości następujących wyrażeń:

1. $9^{-\frac{1}{2}}$; 2. $(100)^{-\frac{1}{2}}$; 3. $(1000)^{\frac{2}{3}}$; 4. $(81)^{-\frac{3}{4}}$.

5. $(a^{-2})^{-3}$, 6. $\sqrt[3]{a^{-3}}$; 7. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{1}{4}}$.

Pomnożyć:

8. $x^4 + x^2 + 1$ przez $x^{-4} - x^{-2} + 1$.

9. $a^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} + 1$ przez $a^{-\frac{1}{3}} - 1$.

Podzielić:

10. $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$ przez $x^{\frac{1}{6}} - y^{\frac{1}{6}}$.

11. $x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} y - y^{\frac{3}{2}}$ przez $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$.

Znaleść pierwiastki kwadratowe następujących wyrażeń:

12. $x^{\frac{5}{3}} - 4x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{7}{6}} + 4x - 4x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}}$.

13. $x^{\frac{1}{2}} - 4 + 4x^{-\frac{1}{2}}$.

XXXI.

Ilości pierwiastkowe.

300. Gdy pierwiastek pewnej liczby nie może być dokładnie oznaczony, wtedy nazywa się on *ilością pierwiastkową* i przedstawia szczególny przypadek tego, co w matematyce nazywamy w ogólności *ilością niewymierną.*

Tak np. następujące ilości są pierwiastkowemi:

$$\sqrt{5},\quad \sqrt{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[3]{4},\quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}},\quad \sqrt[4]{7}.$$

Podobnież jeżeli pierwiastek wyrażenia algebraicznego nie może być oznaczony bez użycia wykładników ułamkowych, wtedy i on także nazywa się *ilością pierwiastkową.*

Tak naprzykład następujące ilości są pierwiastkowemi:

$$\sqrt{a},\quad \sqrt{\frac{a}{b}},\quad \sqrt{a^2+ab+b^2},\quad \sqrt[3]{a^2},\quad \sqrt[3]{a^3+b^3}.$$

Prawidła na działania z ilościami pierwiastkowemi, wypływają bezpośrednio z zasad, wyłożonych w poprzednim rozdziale; rozdział niniejszy jest prawie całkowicie zastosowaniem tych zasad do przykładów liczebnych.

301. Liczby lub wyrażenia algebraiczne mogą się przedstawić pod formą pierwiastkową, nie będąc w *rzeczywistości* pierwiastkowemi. Tak naprzykład: $\sqrt{9}$ jest wyrażone pod postacią pierwiastkową, lecz nie jest w rzeczywistości ilością pierwiastkową, gdyż $\sqrt{9} = 3$. Podobnież $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ jest tylko pod postacią pierwiastkową, nie będąc w rzeczywistości ilością pierwiastkową, gdyż $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$.

302. Często wypada ilość wymierną przedstawić pod postacią ilości pierwiastkowej oznaczonego stopnia: w takim razie należy daną ilość podnieść do potęgi takiej, jaki jest

wykładnik ilości pierwiastkowej, i nad tąż potęgą napisać znak pierwiastku.

Naprzykład:

$$3 = \sqrt{3^2} = \sqrt{9};\qquad 4 = \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64};\quad a = \sqrt[4]{a^4};$$

$$a + b = \sqrt[3]{(a+b)^3}.$$

303. Iloczyn z ilości wymiernej przez ilość pierwiastkową może być wyrażony pod postacią ilości całkowicie pierwiastkowej w ten sposób: należy najprzód ilość wymierną wyrazić pod postacią pierwiastkową, i następnie pomnożyć przez daną ilość pierwiastkową (patrz § 297). Naprzykład:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18};$$

$$2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{32};$$

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}.$$

304. I odwrotnie: ilość całkowicie pierwiastkowa może być wyrażoną w postaci iloczynu z ilości wymiernej przez pierwiastkową, jeżeli można wyciągnąć pierwiastek z jednego z czynników ilości podpierwiastkowej.

Tak np.:

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2};$$

$$\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{8 \times 6} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{6} = 2\sqrt[3]{6};$$

$$\sqrt[3]{a^3 b^2} = \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{b^2} = a\sqrt[3]{b^2}.$$

305. Ilość pierwiastkowa ułamkowa może być zamienioną na równoważne jej wyrażenie, w którem mianownik będzie wymierny. Tak naprzykład:

$$\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3 \times 2}{8 \times 2}} = \sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 9}{3 \times 9}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}.$$

306. Ilości pierwiastkowe, nie mające tego samego wykładnika pierwiastku, mogą być przekształcone na równoznaczne ilości takie, w których wykładniki pierwiastków będą jednakowe (patrz § 297). Naprzykład, weźmy pod uwagę $\sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{11}$.

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[3]{11} = (11)^{\frac{1}{3}};$$

$$5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125};$$

$$(11)^{\frac{1}{3}} = (11)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(11)^2} = \sqrt[6]{121}.$$

307. Możemy tutaj wskazać jedno z zastosowań poprzedniego paragrafu. Przypuśćmy, że chcemy poznać co jest większe $\sqrt{5}$ czy $\sqrt[3]{11}$? Jeżeli sprowadzimy obie te ilości do jednakowego wykładnika pierwiastku, przekonamy się że pierwsza jest większą, gdyż 125 jest większe od 121.

308. Ilości pierwiastkowe nazywają się *podobnemi* wtedy, gdy mają też same czynniki pierwiastkowe, albo też gdy mogą być sprowadzone do takiej postaci, że do nich wchodzić będą też same czynniki pierwiastkowe.

Tak np. $4\sqrt{7}$ i $5\sqrt{7}$ są ilościami pierwiastkowemi podobnemi; $5\sqrt[3]{2}$ i $4\sqrt[3]{16}$ są także ilościami pierwiastkowemi podobnemi, gdyż:

$$4\sqrt[3]{16} = 8\sqrt[3]{2}.$$

309. Aby dodać lub odjąć ilości pierwiastkowe podobne, należy dodać lub odjąć ich współczynniki i przypisać do wypadku współczynnik pierwiastkowy.

Naprzykład.

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$$
$$(2 + 5 - 4)\sqrt{3} = 3\sqrt{3};$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{256}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{12}{8}} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{64 \times 12}{27}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{12}}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4\sqrt[3]{12}}{3} = \frac{2\sqrt[3]{12}}{3}.$$

310. Aby pomnożyć jednomiany pierwiastkowe, takie, które mają tenże sam wykładnik pierwiastku, należy pomnożyć oddzielnie czynniki wymierne i czynniki pierwiastkowe.

Tak naprzykład:

$$3\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{6}; \qquad 4\sqrt{5} \times 7\sqrt{6} = 28\sqrt{30};$$

$$2\sqrt[3]{4} \times 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{8} = 6 \times 2 = 12.$$

311. Aby pomnożyć jednomiany pierwiastkowe, w których wykładniki pierwiastków nie są jednakowe, należy je najprzód sprowadzić do jednakowego wykładnika i potem postępować jak wyżej.

Naprzykład: pomnożyć $4\sqrt{5}$ przez $2\sqrt[3]{11}$. Na zasadzie 306 mamy:

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{125}; \qquad \sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{121};$$

przeto żądany iloczyn będzie:

$$8\sqrt[6]{125 \times 121} = 8\sqrt[6]{15125}.$$

312. Mnożenie wielomianów pierwiastkowych wykonywa się w podobny sposób, jak każde mnożenie wielomianów algebraicznych.

Naprzykład:

$$(6\sqrt{3} - 5\sqrt{2}) \times (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) = 36 + 18\sqrt{6} -$$
$$- 10\sqrt{6} - 30 = 6 + 8\sqrt{6}.$$

313. Dzielenie przez jednomian pierwiastkowy wykonywa się w podobny sposób jak mnożenie przez jednomian pierwiastkowy. Wypadek z takiego dzielenia może być uproszczony na zasadzie § 305.

Naprzykład:

$$3\sqrt{2}:4\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$4\sqrt{5}:2\sqrt[3]{11}=\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{11}}=\frac{2\sqrt[6]{125}}{\sqrt[6]{121}}=2\sqrt[6]{\frac{125}{121}}=$$

$$=2\sqrt[6]{\frac{125\times(11)^4}{121\times(11)^4}}=\frac{2\sqrt[6]{1830125}}{11}.$$

Zwracamy uwagę uczącego się, że powyższe przekształcenia, dokonane na zasadzie § 305, dają nam ostateczne wypadki pod postacią najdogodniejszą do liczebnych zastosowań; tak naprzykład, jeżeli chcemy znaleść przybliżoną wartość liczebną wyrażenia

$$3\sqrt{2}:4\sqrt{3},$$

wtedy najprościej dochodzimy do wypadku wyciągając pierwiastek kwadratowy z 6 i dzieląc otrzymany wypadek przez 4.

314. Dzielenie przez wielomian pierwiastkowy w jednym tylko przypadku ma znaczenie praktyczne, w tym mianowicie: gdy dzielnik jest sumą lub różnicą dwóch ilości pierwiastkowych *stopnia drugiego*, czyli zawierających pierwiastki kwadratowe. Takie dzielenie ostatecznie wykonywa się za pomocą ważnego działania, które polega na przekształceniu ilorazu, mającego mianownik pierwiastkowy, na takie wyrażenie, w którem mianownik jest *wymiernym*. Weźmy jako przykład ułamek:

$$\frac{4}{5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

jeżeli licznik i mianownik tego ułamka pomnożymy przez $5\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, wtedy wartość ułamka nie zmieni się a mianownik stanie się *wymiernym*. W rzeczy samej:

$$\frac{4}{5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{4(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(5\sqrt{2}+2\sqrt{3})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{4(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{50-12}=\frac{10\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{19}.$$

Podobnież:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{8+3\sqrt{6}}{12-2}=\frac{8+3\sqrt{6}}{10}.$$

315. W ogólności gdybyśmy mieli ułamek, którego licznik jest jakikolwiek m, a mianownik sumą dwóch ilości pierwiastkowych stopnia drugiego:

$$\frac{m}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}},$$

wtedy w celu zamiany tego ułamka na taki, w którym mianownik byłby wymierny, należy jego licznik i mianownik pomnożyć przez różnicę tychże samych ilości pierwiastkowych, których suma stanowi mianownik.

W rzeczy samej, postępując tak otrzymamy:

$$\frac{m}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}=\frac{m(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}=$$

$$=\frac{m(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d}.$$

Nowy mianownik a^2b-c^2d znajdziemy albo wykonywając wprost mnożenie $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})$, albo też możemy odrazu napisać wypadek na tej zasadzie, że iloczyn z sumy dwóch ilości przez ich różnicę, równa się różnicy kwadratów tychże samych ilości (patrz § 77).

Gdyby w mianowniku była różnica dwóch ilości pierwiastkowych stopnia drugiego, wtedy należy pomnożyć licznik i mianownik ułamka przez sumę tych ilości, których różnica stanowi mianownik. Np.:

$$\frac{m}{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}=\frac{m(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}=$$

$$=\frac{m(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d}$$

316. W przypadku gdyby w mianowniku był trójmian pierwiastkowy, możnaby również ułamek taki zamienić na ułamek z mianownikiem wymiernym, tylko działanie byłoby dłuższe. Następny przykład pokazuje, jak w podobnych przypadkach należy postępować, aby uwolnić mianownik od ilości pierwiastkowych.

Niech będzie dany ułamek:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}},$$

który chcemy przekształcić na ułamek z mianownikiem wymiernym. Oznaczmy na chwilę $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jedną głoską s; wtedy dany ułamek przedstawi się pod postacią:

$$\frac{1}{s+\sqrt{7}}.$$

Aby tutaj uwolnić się od ilości pierwiastkowej w mianowniku, należy licznik i mianownik pomnożyć przez $s-\sqrt{7}$; czyniąc to będzie:

$$\frac{1}{s+\sqrt{7}}=\frac{s-\sqrt{7}}{(s+\sqrt{7})(s-\sqrt{7})}=\frac{s-\sqrt{7}}{s^2-7}.$$

Podstawmy teraz zamiast s jego wartość, to jest $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; wtedy ułamek ten zamieni się na następny:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-7};$$

a że:

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=3+2\sqrt{15}+5=8+2\sqrt{15},$$

(podług wzoru na $(a+b)^2$), przeto powyższy ułamek będzie:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{8+2\sqrt{15}-7}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}}.$$

Zamiast więc ułamka danego, w którym mianownik był trójmianem pierwiastkowym, otrzymaliśmy ułamek, którego mianownik jest dwumianem; możemy przeto uwolnić się od ilości pierwiastkowych sposobem podanym wyżej, i ostatecznie otrzymać ułamek z mianownikiem wymiernym. Mnożąc mianowicie licznik i mianownik ostatniego ułamka przez $1-2\sqrt{15}$, będzie:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(1-2\sqrt{15})}{(1+2\sqrt{15})(1-2\sqrt{15})}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-6\sqrt{5}-10\sqrt{3}+2\sqrt{105}}{1-60}=$$

$$=\frac{-9\sqrt{3}-5\sqrt{5}-\sqrt{7}+2\sqrt{105}}{-59}=$$

$$=\frac{9\sqrt{3}+5\sqrt{5}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}}{59}.$$

Temu więc ostatniemu ułamkowi równa się ułamek dany:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}.$$

W podobny sposób, przez dwukrotne powtórzenie działania mnożenia licznika i mianownika przez jednę i tęż samę ilość, możemy każdy ułamek, którego mianownik jest trójmianem pierwiastkowym, zamienić na ułamek z mianownikiem wymiernym.

317. Pokażemy teraz jak znaleść pierwiastek kwadratowy z dwumianu, którego jeden wyraz jest ilością pierwiastkową stopnia drugiego. Przypuśćmy naprzykład, że chcemy znaleść pierwiastek kwadratowy z $7+4\sqrt{3}$. Ponieważ:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy},$$

przeto widoczną jest rzeczą, że jeżeli znajdziemy na x i y takie wartości, któreby zadosyć czyniły warunkom:

$$x + y = 7,$$

i:

$$2\sqrt{xy} = 4\sqrt{3},$$

wtedy pierwiastek kwadratowy z $7 + 4\sqrt{3}$ będzie równy $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. Całe działanie możemy ułożyć w ten sposób:

Przypuśćmy, że:

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

podnieśmy obie strony tej równości do kwadratu, będzie:

$$7 + 4\sqrt{3} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

Przyjmijmy, że

$$x + y = 7,$$

wtedy będzie:

$$2\sqrt{xy} = 4\sqrt{3}.$$

Podnieśmy znowuż do kwadratu obie strony każdego z tych dwóch ostatnich równań, i odejmijmy je następnie; otrzymamy:

$$(x + y)^2 - 4xy = 49 - 48 = 1,$$

czyli:

$$(x - y)^2 = 1,$$

skąd:

$$x - y = 1.$$

Ponieważ $x + y = 7$, i $x - y = 1$, przeto będzie:

$$x = 4,$$
$$y = 3.$$

Otrzymamy więc:

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$$

Podobnież znaleźlibyśmy:

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

318. Rachunkiem podobnym do powyżej pokazanego moglibyśmy znaleść i ogólne wyrażenie na

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}};$$

pokażemy jednak tutaj jeszcze inny sposób wyprowadzenia tych wyrażeń ogólnych.

Jeżeli jakąkolwiek ilość podniesiemy do kwadratu i następnie z tego ostatniego wyciągniemy pierwiastek kwadratowy, wtedy otrzymamy początkową ilość; — dwa te działania wzajemnie się zniosą. Na tej zasadzie mamy:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$$

czyli:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Podobnież:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$$

czyli:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{x + y - 2\sqrt{xy}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dwie te równości są tożsamościowe, to jest mają miejsce przy wszelkich znaczeniach na x i y; — mieć więc będą miejsce i wtedy gdy uczynimy:

$$x = a + \sqrt{b}, \qquad y = a - \sqrt{b}.$$

Dodając odpowiedniemi stronami te ostatnie dwie równości, będzie:

$$x + y = 2a;$$

mnożąc zaś je:

$$xy = a^2 - b.$$

Podstawiając teraz te wartości na x, y, $x + y$ i xy w równości (1) i (2), otrzymamy:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b}},$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b}}.$$

Przez dodanie odpowiedniemi stronami tych dwóch równości znajdziemy:

$$2\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b}} + \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b}};$$

przez odjęcie zaś drugiej równości od pierwszej będzie:

$$2\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}-\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

Dzieląc tak pierwszą, jak i drugą równość przez 2 otrzymamy:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}}{2}+\frac{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}}{2},$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}}{2}-\frac{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}}{2}.$$

Podprowadzając zaś mianowniki 2 pod znaki pierwiastku:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{2a+2\sqrt{a^2-b}}{4}}+\sqrt{\frac{2a-2\sqrt{a^2-b}}{4}}$$

i skracając następnie każdy z ułamków, znajdujących się na drugich stronach równości, otrzymamy ostatecznie dwa wzory:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Równości te są tożsamościami, to jest mają miejsce przy wszystkich znaczeniach na a i b. Chcąc je zastosować, należy w każdym szczególnym przypadku podstawić zamiast a i b odpowiednie wartości. Tak np. jeżeli dane wyrażenie będzie:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}},$$

które już wyżej rozważaliśmy, wtedy należy najprzód 4 podciągnąć pod znak pierwiastku, otrzymamy:

$$\sqrt{7+\sqrt{48}},$$

i następnie w pierwszym z ostatnich wzorów podstawić 7 zamiast a i 48 zamiast b. Znajdziemy:

$$\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{7+1}{2}}+\sqrt{\frac{7-1}{2}},$$

i nakoniec:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Lecz jakkolwiek te wzory zawsze dają się zastosować jakiekolwiekby a i b miały znaczenia, z tem wszystkiem nie zawsze dogodną jest rzeczą używać ich, gdyż wyrażenia na drugich stronach tych równości są w ogóle bardziej złożonemi, aniżeli na pierwszych stronach. W jednym tylko przypadku korzystnem jest ich użycie, wtedy mianowicie, gdy na drugich stronach zginą znaki pierwiastkowe pod pierwiastkiem. Ten wypadek mieć będzie miejsce wtedy, gdy ilości a i b będą takie, że a^2-b będzie *zupełnym kwadratem*. Wtedy bowiem $\sqrt{a^2-b}$ będzie mógł być znaleziony dokładnie, i ilości pierwiastkowej pod znakiem pierwiastku nie będzie.

Weźmy jeszcze jako przykład:

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}$$

Najprzód podprowadzamy współczynnik 2 pod znak pierwiastkowy; będzie:

$$\sqrt{8-\sqrt{60}}.$$

Tutaj: $a^2-b=8^2-60=64-60=4$, jest zupełnym kwadratem; dogodną jest więc rzeczą użyć wzoru na $\sqrt{a-\sqrt{b}}$. Stosując ten wzór otrzymamy:

$$\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{\frac{8+\sqrt{8^2-60}}{2}}-\sqrt{\frac{8-\sqrt{8^2-60}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{8+\sqrt{4}}{2}}-\sqrt{\frac{8-\sqrt{4}}{2}}=$$

$$\sqrt{\frac{10}{2}}-\sqrt{\frac{6}{2}},$$

i nakoniec:

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

PRZYKŁADY XXXI.

Uprościć:

1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}$; 2) $2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}$;

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$.

Pomnożyć:

4) $1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ przez $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

5) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ przez: $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Uczynić wymiernymi mianowniki następujących ułamków:

6) $\frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$. 7) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. 8) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$;

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z następujących wyrażeń:

9) $14+6\sqrt{5}$. 10) $4-\sqrt{15}$.

Uprościć:

11) $\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$. 12) $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

13) $\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[4]{b^4}+\left(\sqrt[n]{m}\right)^n+\frac{a}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}$.

Wykonać działania:

14) $(\sqrt{m}-\sqrt{m-n})\,(\sqrt{m}+\sqrt{m-n})$.

15) $\sqrt{xy}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$.

W następujących wyrażeniach wprowadzić współczynnik pod znak pierwiastkowy.

16) $5\sqrt[3]{4}$; 17) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$.

Uczynić wymiernymi mianowniki w następujących ułamkach:

18) $\frac{1+2\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$; 19) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

Znaleść czemu się równa:

20) $\sqrt[n]{a^m}\,.\,\sqrt[r]{a^s}$;

21) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5$; 22) $\sqrt[7]{a^2\sqrt[3]{a}}$.

XXXII.

Równania stopnia drugiego.

319. Równaniem stopnia drugiego nazywamy takie równanie, które zawiera *kwadrat* ilości niewiadomej, ale nie zawiera wyższej potęgi tejże ilości.

320. Równanie stopnia drugiego nazywa się *czystem* wtedy, gdy zawiera *tylko* kwadrat ilości niewiadomej. Równanie stopnia drugiego nazywa się wtedy *zupełnem*, gdy, oprócz kwadratu niewiadomej, zawiera także niewiadomą w stopniu pierwszym. Tak naprzykład: równanie $2x^2 = 50$ jest *czystem* równaniem stopnia drugiego; równanie zaś $2x^2 - 7x + 3 = 0$ jest *zupełnem*.

321. Na rozwiązanie czystego równania stopnia drugiego można podać następujące prawidło:

Należy najprzód znaleść wartość na kwadrat niewiadomej sposobem podanym na rozwiązywanie równań stopnia pierwszego, następnie przez wyciągnięcie pierwiastku kwadratowego znajdą się wartości na niewiadomą.

Naprzykład: rozwiązać równanie:

$$\frac{x^2 - 13}{3} + \frac{x^2 - 5}{10} = 6.$$

Znieśmy najprzód mianowniki przez pomnożenie obu stron równania przez 30; będzie:

$$10(x^2 - 13) + 3(x^2 - 5) = 180;$$

skąd:

$$13x^2 = 180 + 130 + 15 = 325;$$

i następnie:

$$x^2 = \frac{325}{13} = 25$$

Wyciągając z obu stron pierwiastki kwadratowe, otrzymamy:

$$x = \pm 5.$$

W tym przykładzie postępując najprzód tak, jak przy rozwiązaniu równań stopnia pierwszego znaleźliśmy, że x^2 jest równe 25. Stąd wypada, że samo x jest taką liczbą, która podniesiona do kwadratu, daje na wypadek 25; czyli x jest pierwiastkiem kwadratowym z 25.

W arytmetyce takim pierwiastkiem jest 5, lecz w algebrze pierwiastek ten ma dwa znaczenia $+5$ i -5, (patrz § 257). Zatem x może mieć wartość $+5$ lub -5; każda z tych ilości zadosyć czyni równaniu, i to wyrażamy pisząc:

$$x = \pm 5.$$

322. Stąd widzimy, że równanie czyste stopnia drugiego ma dwa pierwiastki, jednakowe co do liczebnej wartości, ale różniące się znakiem. Jeżeli chcemy dwa te pierwiastki oddzielnie i wyraźnie napisać, wtedy rozróżniamy je w ten sposób, że jeden z nich oznaczamy przez x_1, drugi zaś przez x_2; tym sposobem będzie:

$$x_1 = +5; \quad x_2 = -5.$$

W ogóle, gdyby było do rozwiązania równanie:

$$ax^2 + c = 0,$$

wtedy, przez przeniesienie c na drugą stronę, byłoby najprzód:

$$ax^2 = -c,$$

następnie:

$$x^2 = -\frac{c}{a},$$

a przez wyciągnięcie z obu stron pierwiastku kwadratowego:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

czyli, pisząc oddzielnie oba pierwiastki:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Natura tych pierwiastków zależy od ilości znajdującej się pod znakiem pierwiastku, to jest od $-\frac{c}{a}$. Najprzód należy tu zwrócić uwagę na to, że nie zawsze ta ilość jest ujemną, jakkolwiek w ogólnym wzorze znajduje się znak $-$. Znak ten powstał z przeniesienia c na drugą stronę równania, i wyraża tylko to, że na tej drugiej stronie c ma znak przeciwny temu, jaki miało, gdy było na pierwszej stronie. Zatem $-c$ oznaczać będzie tylko wtedy, ilość ujemną, gdy c na pierwszej stronie było dodatnie,*) i ułamek $-\frac{c}{a}$ będzie dodatnim wtedy, gdy c na pierwszej stronie jest ujemne; w przeciwnym zaś razie ułamek ten jest ujemnym. Gdy $-\frac{c}{a}$ jest ilością dodatnią, wtedy $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, a zatem i wartości na x_1 i x_2 albo mogą być dokładnie wyrażone za pomocą liczby całkowitej lub ułamka, (co mieć będzie miejsce wówczas, gdy $-\frac{c}{a}$ będzie zupełnym kwadratem), albo też obie te wartości pozostaną niewymierne.

Gdy $-\frac{c}{a}$ będzie ujemne, wtedy wartości na x będą niemożliwe, czyli *urojone*. (§ 259).

Objaśnimy to, co było powiedziane wyżej, kilkoma przykładami:

Z równania $5x^2 - 45 = 0$, otrzymujemy,

$$5x^2 = 45,$$
$$x^2 = 9,$$

skąd: $x = \pm 3$; czyli pisząc oddzielnie oba pierwiastki:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -3.$$

Drugie równanie: $4x^2 - 25 = 0$. Wtedy:

$$4x^2 = 25,$$

skąd:

$$x^2 = \frac{25}{4},$$

i nakoniec:

$$x = \pm \frac{5}{2},$$

*) Gdyż w przeciwnym przypadku przez zmianę wszystkich znaków w całem równaniu, otrzymalibyśmy równanie, w którem pierwszy wyraz byłby dodatni.

to jest:

$$x_1 = \frac{5}{2}; \quad x_2 = -\frac{5}{2}.$$

Gdyby było równanie: $7x^2 - 21 = 0$; wtedy pierwiastki jego byłyby niewymierne:

$$x_1 = \sqrt{3}, \quad x_2 = -\sqrt{3}.$$

Przypuśćmy jeszcze, że mamy równanie:

$$3x^2 + 12 = 0.$$

Chcąc je rozwiązać, mamy najprzód:

$$3x^2 = -12,$$

następnie:

$$x^2 = -4,$$

a stąd:

$$x = \pm \sqrt{-4}.$$

A że niema takiej ilości dodatniej lub ujemnej, któraby podniesiona do kwadratu dała na wypadek ilość ujemną—4, przeto w tym przypadku x nie może być oznaczone w liczbach dodatnich lub ujemnych: i to wyrażamy mówiąc, że x jest *urojone*. Przeciwnie zaś w pierwszym przypadku wartości na x nazywamy *rzeczywistemi*. Często w matematyce ilości urojone wyrażamy symbolicznie następującym sposobem:

Ponieważ: $-4 = 4 \times -1$, przeto:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times -1},$$ czyli:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1},$$

to jest:

$$\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}.$$

Tutaj $\sqrt{-1}$ jest właśnie znakiem lub symbolem ilości urojonej: zwykle oznaczamy go w rachunkach głoską i. Wprowadzając to oznaczenie mieć będziemy następujące wartości na x:

$$x_1 = 2i; \quad x_2 = -2i.$$

W rozbieranym przypadku równanie niema rozwiązania w liczbach dodatnich i ujemnych. Lecz uważając $2i$ jako ilość nowego rodzaju, i nadając głosce i znaczenie takie, że $i^2 = -1$, możemy się przekonać łatwo, że przy tych warunkach $2i$ zadosyć czynić będzie danemu równaniu: $3x^2+12=0$. Przez wprowadzenie zatem znaku ilości urojonej, rozwiązanie czystego równania stopnia drugiego, staje się zawsze możliwem; — tylko w pewnych przypadkach rozwiązanie to będzie rzeczywistem, w innych zaś urojonem.

W ogólności ilość urojona $\sqrt{-a^2}$ może być w ten sposób wyrażona:

Ponieważ: $-a^2 = a^2(-1)$

więc: $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \cdot (-1)}$

czyli: $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1}$,

albo: $\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1}$.

Wprowadzając i zamiast $\sqrt{-1}$, będzie $\sqrt{-a^2} = ai$.

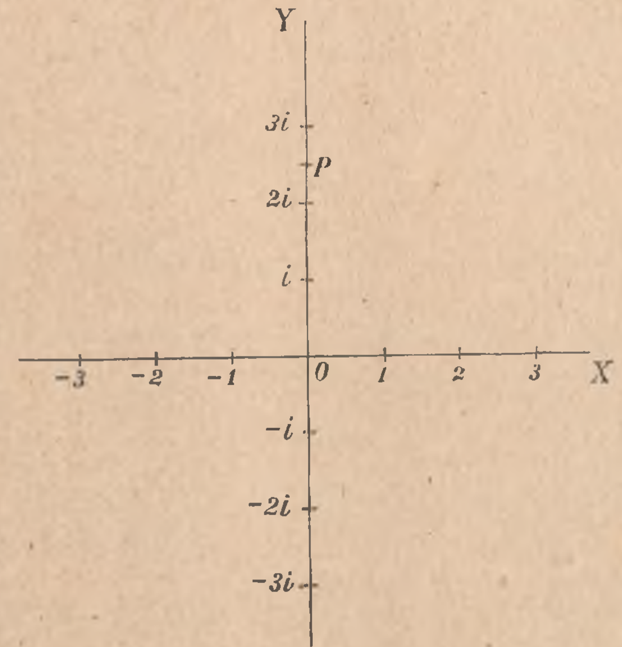
323. Ażeby móc uważać wszystkie liczby dodatnie za kwadraty pewnych liczb, wypadło nam wprowadzić liczby niewymierne. Podobnie i tutaj, ażeby móc jeszcze i liczby ujemne uważać za kwadraty pewnych liczb, czynimy nowe uogólnienie, wprowadzając liczby, które nie są ani dodatnie, ani ujemne, i które dlatego — niezupełnie właściwie — nazwano urojonemi.

Charakterystyczna różnica pomiędzy liczbami rzeczywistemi i urojonemi polega na tem, że każda liczba rzeczywista a jest równa, większa lub mniejsza od drugiej liczby rzeczywistej b, zależnie od tego czy $a - b$ jest 0, dodatnie czy ujemne; ale różnica dwóch liczb urojonych

$$ai - bi = (a - b)\, i$$

jest też liczbą urojoną, a więc ani dodatnią ani ujemną; liczba ai nie jest więc ani większą ani mniejszą od bi, chociaż nie jest jej równa.

Liczby rzeczywiste przedstawialiśmy na lini prostej OX zwykle w ten sposób, że punkty odpowiadające liczbom większym leżały na prawo od punktów, przedstawiających liczby mniejsze; liczby urojone przedstawimy więc za pomocą takich punktów, które nie leżą względem siebie na prawo ani na lewo. W tym celu prowadzimy prostą OY prostopadłą do OX i wypisujemy wzdłuż niej, w odstępach równych jednostce długości, liczby urojone i, $2i$, $3i$... nad osią OX a $-i$,



$-2i$, $-3i$... pod osią. Proste OX i OY nazywają niekiedy *osią rzeczywistych* i *osią urojonych*.

Ilość urojona $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ może być ułamkowa lub niewymierna, zależnie od tego, jakim jest $\sqrt{a}$. Punkt P np. oznacza $\sqrt{-\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{5}{2}\, i$.

W dalszym ciągu, o ile nie zrobimy odpowiedniego zastrzeżenia, przez litery oznaczać będziemy tylko ilości rzeczywiste: jedynie litera, oznaczająca niewiadomą w równaniu, przedstawiać może równie dobrze wielkość urojoną jak rzeczywistą.

324. Przechodzimy teraz do rozwiązania równań zupełnych stopnia drugiego.

Jeżeli $x + \frac{a}{2}$ pomnożymy przez tęż samę ilość, otrzymamy:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right) = x^2 + 2\frac{ax}{2} + \frac{a}{4} = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}.$$

Widzimy więc, że $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ jest zupełnym kwadratem, gdyż jest to kwadrat ilości $x + \frac{a}{2}$. Stąd wypada, że dwumian $x^2 + ax$ staje się kwadratem zupełnym przez dodanie do niego $\frac{a^2}{4}$, to jest przez *dodanie kwadratu połowy współczynnika przy x*. Fakt ten stanowi główną podstawę rozwiązania równania zupełnego stopnia drugiego. Objaśnimy to kilkoma przykładami.

Weźmy np. $x^2 + 6x$; tutaj połową współczynnika przy x jest 3; dodając do tego dwumianu 3^2, otrzymamy $x^2 + 6x + 3^2$, a to jest $(x + 3)^2$.

$x^2 - 5x$; tutaj połową współczynnika przy x jest $-\frac{5}{2}$, dodając $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$, czyli $\left(\frac{5}{2}\right)^2$, otrzymamy $x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2$, a to jest $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$.

$x^2 - \frac{4x}{5}$; tutaj połową współczynnika przy x jest $-\frac{2}{5}$; dodając $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ otrzymamy $x^2 - \frac{4x}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2$, a to jest $\left(x - \frac{2}{5}\right)^2$.

$x^2 - \frac{3x}{4}$; tutaj połową współczynnika przy x jest $-\frac{3}{8}$; dodając $\left(-\frac{3}{8}\right)^2$, czyli $\left(\frac{3}{8}\right)^2$, otrzymany $x^2 - \frac{3x}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$, co znowuż jest równe $\left(x - \frac{3}{8}\right)^2$.

Działanie objaśnione tymi przykładami, nazywa się *dopełnieniem do kwadratu*.

325. Prawidło na rozwiązanie równania zupełnego stopnia drugiego jest następne:

Należy najprzód równanie przyprowadzić do takiej postaci, aby na pierwszej stronie były tylko wyrazy zawierające niewiadomą, i aby współczynnik przy x^2 był równy 1; następnie dodać do każdej strony równania kwadrat połowy współczynnika przy x i wyciągnąć z obu stron pierwiastek kwadratowy.

Przekonamy się z przykładów następujących, że prawidło to prowadzi nas do takiego punktu, z którego bezpośrednio już możemy otrzymać wartości na niewiadomą.

326. Rozwiązać równanie:

$$x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy 24 na drugą stronę, będzie:

$$x^2 - 10x = -24;$$

dodając do obu stron równania po $\left(\frac{10}{2}\right)^2$, otrzymamy:

$$x^2 - 10x + 5^2 = -24 + 25 = 1.$$

Wyciągnijmy teraz pierwiastek kwadratowy z obu stron równania; znajdziemy:

$$x - 5 = \pm 1,$$

a następnie: $x = 5 \pm 1$. czyli:

$$x = \text{albo } 5 + 1, \text{ albo } 5 - 1;$$

skąd: $x_1 = 6$; $x_2 = 4$.

Łatwo się przekonać, że każda z tych wartości zadosyć czyni danemu równaniu, i zalecamy uczącemu się sprawdzać zawsze otrzymane wartości przez podstawienie ich w dane równanie.

327. Rozwiązać:

$$3x^2 - 4x - 55 = 0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę:

$$3x^2 - 4x = 55,$$

dzieląc przez 3 obie strony równania, otrzymamy:

$$x^2 - \frac{4x}{3} = \frac{55}{3};$$

dodając do obu stron po $\left(\frac{2}{3}\right)^2$:

$$x^2 - \frac{4x}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{55}{3} + \frac{4}{9} = \frac{169}{9};$$

wyciągając pierwiastki kwadratowe:

$$x - \frac{2}{3} = \pm \frac{13}{3};$$

skąd: $x = \frac{2}{3} \pm \frac{13}{3}$;

czyli: $x_1 = 5$; $x_2 = -\frac{11}{3}$.

328. Rozwiązać:

$$2x^2 + 3x - 35 = 0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę:

$$2x^2 + 3x = 35,$$

dzieląc następnie przez 2:

$$x^2 + \frac{3x}{2} = \frac{35}{2};$$

i dodając $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, otrzymamy:

$$x^2 + \frac{3x}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{35}{2} + \frac{9}{16} = \frac{289}{16}.$$

Wyciągając teraz pierwiastek kwadratowy z obu stron, będzie:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{17}{4},$$

skąd: $x = -\frac{3}{4} \pm \frac{17}{4}$,

czyli $x_1 = \frac{7}{2}$; $x_2 = -5$.

329. Rozwiązać:

$$x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Przez przeniesienie wyrazu wiadomego, będzie:

$$x^2 - 4x = 1;$$

dodajemy teraz do obu stron równania 2^2; otrzymamy:

$$x^2 - 4x + 2^2 = 1 + 4 = 5,$$

skąd, po wyciągnięciu pierwiastku kwadratowego znajdziemy:

$$x - 2 = \pm \sqrt{5};$$

a następnie:

$$x = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Tutaj pierwiastek kwadratowy z 5 nie może być znaleziony dokładnie; — w każdym razie za pomocą sposobu podanego w §§ 273 i 274 możemy oznaczyć wartość przybliżoną tegoż pierwiastku do takiego stopnia, do jakiego chcemy, a tem samem i wartość na x może być oznaczoną z takim stopniem przybliżenia, z jakim chcemy.

330. W przykładach dotąd rozwiązanych znajdywaliśmy zawsze dwa różne pierwiastki równania stopnia drugiego; są jednak pewne przypadki, w których otrzymujemy w rzeczywistości jeden tylko pierwiastek. Weźmy jako przykład równanie: $x^2 - 14x + 49 = 0$; przez wyciągnięcie pierwiastku kwadratowego z obu stron równania będzie $x - 7 = 0$ skąd $x = 7$. Jednak dla wielu powodów uznano za stosowne mówić i w tym przypadku, że równanie stopnia drugiego ma *dwa pierwiastki równe*.

331. Rozwiązać:

$$x^2 - 6x + 13 = 0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę, będzie:

$$x^2 - 6x = -13;$$

dodając po 3^2 do obu stron:

$$x^2 - 6x + 3^2 = -13 + 9 = -4.$$

Wyciągając z obu stron pierwiastek kwadratowy, otrzymamy:

$$x - 3 = \pm \sqrt{-4},$$

czyli:

$$x = 3 \pm \sqrt{-4}.$$

Lecz -4 nie może mieć żadnego pierwiastku kwadratowego dodatniego lub ujemnego, więc żadna liczba rzeczywista nie może czynić zadość danemu równaniu.

Pierwiastki te mogą być przedstawione pod taką postacią, jak pierwiastki § 322; mianowicie, ponieważ:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i,$$

przeto:

$$x = 3 \pm 2i,$$

lub, pisząc oddzielnie oba pierwiastki:

$$x_1 = 3 + 2i,$$
$$x_2 = 3 - 2i.$$

Liczby takie, będące sumami liczb rzeczywistych i urojonych nazywami *liczbami zespolonemi*, albo także urojonemi.

332. Rozwiązać równanie:

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{x^2 - 1} = \frac{1}{4}.$$

Znieśmy tu najprzód mianowniki, przez pomnożenie obu stron równania przez $4(x^2 - 1)$, to jest przez najmniejszą wspólną wielokrotną względem mianowników. Otrzymamy:

$$2(x + 1) + 12 = x^2 - 1.$$

Przenosząc wyrazy zawierające niewiadomą na pierwszą, a wyrazy wiadome na drugą stronę:

$$x^2 - 2x = 15;$$

dodając po 1^2 do obu stron:

$$x^2 - 2x + 1 = 15 + 1 = 16;$$

a wyciągając pierwiastek kwadratowy z obu stron będzie:

$$x - 1 = \pm 4,$$

skąd:

$$x = 1 \pm 4;$$

czyli:

$$x_1 = 5;\ x_2 = -3.$$

333. Rozwiązać równanie:

$$\frac{2x}{15} + \frac{3x - 50}{3(10 + x)} = \frac{12x + 70}{190}.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez 570, to jest przez najmniejszą wspólną wielokrotną liczb 15 i 190; będzie:

$$76x + \frac{190(3x - 50)}{10 + x} = 3(12x + 70);$$

skąd:

$$\frac{190(3x - 50)}{10 + x} = 210 - 40x,$$

a następnie:

$$190(3x - 50) = (210 - 40x)(10 + x),$$

czyli:

$$570x - 9500 = 2100 - 190x - 40x^2,$$

i dalej:

$$40x^2 + 760x = 11600;$$

dzieląc zaś obie strony równania przez 40:

$$x^2 + 19x = 290.$$

Dodajmy teraz do obu stron po $\left(\frac{19}{2}\right)^2$; otrzymamy:

$$x^2+19x+\left(\frac{19}{2}\right)^2=290+\frac{361}{4}=\frac{1521}{4},$$

a wyciągając z obu stron pierwiastki kwadratowe, będzie:

$$x+\frac{19}{2}=\pm\frac{39}{2},$$

skąd:

$$x=-\frac{19}{2}\pm\frac{39}{2},$$

i nakoniec: $x_1=10;\ x_2=-29.$

334. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}.$$

Znosząc mianowniki otrzymamy:

$$(x+3)(x-2)(x-1)+(x-3)(x+2)(x-1)=$$
$$=(2x-3)(x+2)(x-2);$$

skąd przez wykonanie wskazanych mnożeń:

$$x^3-7x+6+x^3-2x^2-5x+6=2x^3-3x^2-8x+12;$$

a następnie:

$$x^2-4x=0.$$

Dodając do obu stron równania po 2^2, będzie:

$$x^2-4x+2^2=4,$$

wyciągając zaś pierwiastki kwadratowe, znajdziemy:

$$x-2=\pm 2.$$

Stąd nakoniec:

$$x=2\pm 2,$$ czyli:

$$x_1=4;\ x_2=0.$$

Działanie zawarte w ostatnich wierszach podaliśmy dla tego, aby przedstawić rozwiązanie równania w ten sam sposób, w jaki rozwiązywaliśmy poprzednie przykłady; — lecz rozwiązanie w tym przypadku może być znalezione prościej.

W rzeczy samej: równanie $x^2-4x=0$ może być tak napisane: $x(x-4)=0$; i ponieważ pierwsza strona jest iloczynem z dwóch czynników, który ma być równym zero, przeto widocznem jest, że musi być albo $x-4=0$, lub $x=0$; czyli albo $x=4$, albo też $x=0$. (§ 148.)

Zwracamy jeszcze uwagę uczącego się na to, że po zniesieniu mianowników w powyższym przykładzie $2x^3$ znalazło się na obu stronach równania, i z tego powodu mogło ono być usunięte z równania przez odejmowanie, przez co równanie wypadło stopnia drugiego.

335. *Każde równanie stopnia drugiego może być sprowadzone do postaci $x^2+px+q=0$, gdzie p i q są liczbami wiadomemi, całkowitemi lub ułamkowemi, dodatniemi lub ujemnemi.*

Gdyż równanie stopnia drugiego, podług określenia, nie zawiera wyższych potęg ilości niewiadomej nad drugą. Przenieśmy wszystkie wyrazy równania na pierwszą stronę i jeżeli potrzeba, zmieńmy wszystkie znaki na przeciwne, tak, aby wyraz zawierający kwadrat niewiadomej był dodatni:—wtedy dzieląc wszystkie wyrazy równania przez współczynnik przy niewiadomej w stopniu drugim otrzymamy równanie powyższej postaci.

Naprzykład: przypuśćmy, że mamy równanie:

$$7x-4x^2=5.$$

Będzie najprzód:

$$7x-4x^2-5=0,$$

następnie:

$$4x^2-7x+5=0;$$

dzieląc obie strony równania przez 4:

$$x^2-\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}=0.$$

W tym więc przykładzie $p=-\frac{7}{4},\ q=\frac{5}{4}.$

336. Rozwiązać równanie:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Przez przeniesienie wyrazu wiadomego mamy:

$$x^2 + px = -q.$$

Dodajmy po $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ do obu stron; otrzymamy:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2 - 4q}{4}.$$

Wyciągnijmy z obu stron pierwiastki kwadratowe; będzie:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

skąd: $x = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$,

co można też tak napisać:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

337. Tym sposobem otrzymaliśmy *wzór ogólny* na pierwiastki równania stopnia drugiego $x^2 + px + q = 0$, mianowicie x musi być równe:

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ lub } \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Z tych wzorów ogólnych wyprowadzimy teraz kilka bardzo ważnych wniosków, które na zasadzie § 335 odnosić się będą do każdego równania stopnia drugiego.

338. *Równanie stopnia drugiego nie może mieć więcej niż dwa pierwiastki.*

Widzieliśmy bowiem, że pierwiastek *musi być* równym jednej z dwóch znalezionych powyżej wartości.

339. *W równaniu stopnia drugiego, w którem wszystkie wyrazy są przeniesione na jednę stronę, a współczynnik przy niewiadomej w stopniu drugim jest równy jedności, suma pierwiastków jest równą współczynnikowi przy drugim wyrazie ze znakiem przeciwnym, iloczyn zaś tychże pierwiastków jest równy wyrazowi ostatniemu.*

Gdyż niech będzie dane równanie:

$$x^2 + px + q = 0;$$

wtedy suma pierwiastków będzie:

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ to jest } -p.$$

Iloczyn zaś tychże pierwiastków jest:

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \times \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

co jest równe: $\frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4}$

czyli: q.

340. Paragraf poprzedni zasługuje na szczególną uwagę; przedstawia on bowiem bardzo dobry przykład i natury ogólnych wypadków algebry i zarazem sposobów, jakimi do tych ogólnych wypadków dochodzimy. Uczący się powinien sprawdzić te twierdzenia na wszystkich przykładach równań stopnia drugiego dotąd rozwiązanych.

Tak np. weźmy zadanie § 327; równanie tam podane może być przedstawione pod postacią:

$$x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{55}{3} = 0,$$

pierwiastki jego są: 5 i $-\frac{11}{3}$; suma ich wynosi $\frac{4}{3}$, iloczyn zaś $-\frac{55}{3}$.

341. Rozwiązać równanie:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę, mamy:

$$ax^2 + bx = -c;$$

dzieląc całe równanie przez a, będzie:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a};$$

dodając do obu stron równania po $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Wyciągnijmy teraz pierwiastek kwadratowy z obu stron równania, będzie:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

przeto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

342. Wzory ogólne, podane w §§ 336 i 341 mogą być użyte do rozwiązania jakiegokolwiek równania stopnia drugiego. Weźmy jako przykład równanie: $3x^2 - 4x - 55 = 0$; podzielmy obie jego strony przez 3, będzie.

$$x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{55}{3} = 0.$$

Uczyńmy teraz we wzorze § 336, który daje wartości pierwiastków równania $x^2 + px + q = 0$, $p = -\frac{4}{3}$ i $q = -\frac{55}{3}$; otrzymamy po wykonaniu działań pierwiastki danego równania.

Lecz dogodniejszą jest rzeczą użyć wprost wzoru § 341; tym sposobem bowiem unikamy ułamków. Ponieważ dane równanie jest: $3x^2 - 4x - 55 = 0$, przeto we wzorze, dającym wartości pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$, należy uczynić $a = 3$, $b = -4$, i $c = -55$. Wykonywając te podstawienia w wyrażeniu:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

mieć będziemy takie wartości na x:

$$\frac{4 \pm \sqrt{16+660}}{6}, \text{ czyli: } \frac{4 \pm \sqrt{676}}{6}$$

to jest

$$\frac{4 \pm 26}{6}, \text{ albo: } 5 \text{ i } -\frac{11}{3}.$$

343. Oznaczając przez x_1 i x_2 oba pierwiastki równania: $x^2 + px + q = 0$, możemy napisać:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Podobnie jak w równaniu czystem, i tutaj natura tych pierwiastków zależy od ilości, znajdującej się pod znakiem pierwiastku w obu tych wyrażeniach. I tak jeżeli ilość: $\frac{p^2}{4} - q$ jest dodatnią, wtedy oba pierwiastki mieć będą wartości *rzeczywiste*, i ponieważ jeden z nich jest sumą, a drugi różnicą tych samych ilości, przeto w tym przypadku będą one zawsze *nierówne*. Jeżeli znowuż ilość $\frac{p^2}{4} - q$ jest ujemną, wtedy obie wartości na x_1 i x_2 będą *urojone*; wyrazić je można za pomocą $\sqrt{-1}$, lub i, sposobem podanym w §§ 322 i 331. A że w obu wartościach na x_1 i x_2 pod znakiem pierwiastku znajduje się jedna i taż sama ilość, przeto zawsze jednocześnie te wartości będą albo obie rzeczywiste, albo obie urojone: przypadku, w którym jeden pierwiastek równania $x^2+px+q=0$ byłby rzeczywistym a drugi zespolonym, być nie może (przy p i q rzeczywistych).

344. Przy zachowaniu tychże samych oznaczeń, własności pierwiastków równania stopnia drugiego dowiedzione w § 339, mogą być tak wyrażone:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q.$$

Własności te mają częste i ważne zastosowania.

Pokażemy dwa z nich:

Najprzód na zasadzie tych własności można ułożyć równanie stopnia drugiego, którego pierwiastki są dane. Tak np. przypuśćmy, że chcemy napisać takie równanie stopnia drugiego, którego pierwiastkami byłyby liczby 5 i 3. Równanie to będzie miało taką postać: $x^2 + px + q = 0$, gdzie zamiast p i q należy podstawić odpowiednie liczby. Ponieważ, podług własności przytoczonej wyżej, suma pierwiastków równania jest równą współczynnikowi przy x, wziętemu ze znakiem przeciwnym, przeto p powinno być takie, aby było:

$$5 + 3 = -p,$$

skąd:

$$p = -8.$$

I dalej: ponieważ trzeci wyraz q pierwszej strony, powinien być równym iloczynowi pierwiastków, przeto będzie:

$$q = 5 \,.\, 3 = 15.$$

Jeżeli więc utworzymy równanie tąkie:

$$x^2 - 8x + 15 = 0,$$

to jeden jego pierwiastek będzie 5 drugi zaś 3. Uczący się powinien się o tem przekonać przez bezpośrednie rozwiązanie równania.

Gdybyśmy chcieli ułożyć równanie takie, którego pierwiastkami byłyby 3 i — 3, wtedy mielibyśmy:

$$p = -(3 - 3) = 0; \quad q = 3 \,.\, -3 = -9,$$

i żądane równanie byłoby:

$$x^2 + 0 \,.\, x - 9 = 0,$$

czyli:

$$x^2 - 9 = 0.$$

Gdyby pierwiastki równania miały być równe $\frac{1}{3}$ i 0, wtedy byłoby:

$$p = -\left(\frac{1}{3} + 0\right) = -\frac{1}{3};$$

$$q = \frac{1}{3} \times 0 = 0,$$

i równanie szukane przedstawiłoby się tak:

$$x^2 - \frac{1}{3}x + 0 = 0,$$

czyli:

$$3x^2 - x = 0.$$

W podobny sposób należałoby postępować w każdym innym przypadku.

Powtóre: wymienione własności służą do prostego rozwiązania zadania następującego, które często przytrafia się w algebrze. *Mając daną sumę i iloczyn dwóch liczb, znaleść te liczby.*

Przypuśćmy np. że chcemy znaleść dwie liczby, których suma równałaby się 10, a iloczyn 21. Gdybyśmy ułożyli takie równanie, w którem współczynnik przy x byłby równy — 10, a ilość wiadoma q byłaby równą 21, to jest równanie takie:

$$x^2 - 10x + 21 = 0,$$

wtedy na zasadzie własności pierwiastków równania stopnia drugiego, suma pierwiastków tegoż równania równałaby się 10, iloczyn zaś byłby równym 21. Pierwiastki zatem jego byłyby szukanemi liczbami. Rozwiązując to równanie znajdziemy:

$$x_1 = 7; \quad x_2 = 3.$$

Szukane liczby są więc 7 i 3.

I w ogólności: chcąc rozwiązać takie zadanie: znaleść dwie liczby których suma byłaby równą m, a iloczyn n, należałoby ułożyć równanie:

$$x^2 - mx + n = 0,$$

i równanie to rozwiązać; wtedy jeden z jego pierwiastków byłby równym jednej z liczb szukanych, drugi zaś stanowiłby drugą liczbę. Pierwiastki tego równania są:

$$x_1 = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2 - 4n}{4}},$$

$$x_2 = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2 - 4n}{4}},$$

czyli:

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2},$$

$$x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}.$$

Powyższe wzory nie tylko dają nam rozwiązanie uważanego zadania we wszystkich przypadkach, ale nadto zawierają w sobie i rozwiązanie takiego zadania. *Daną liczbę m podzielić na takie dwie części, aby iloczyn ich był równy n.* Widoczną jest rzeczą, że zadanie to sprowadza się bezpośrednio do poprzedniego, gdyż suma tych dwóch szukanych części jest równą danej liczbie m, i iloczyn ich jest wiadomy n. Części te zatem są dane jako wartości x_1 i x_2 wyżej znalezione.

Do tegoż samego wypadku dojdziemy, rozumując w ten sposób: Oznaczmy jednę z szukanych części głoską x; — wtedy druga część będzie $m - x$. A że podług warunków zadania, iloczyn tych części ma być równy n, przeto otrzymamy równanie:

$$x(m - x) = n,$$

czyli:

$$mx - x^2 = n;$$

albo, zmieniając znaki na przeciwne.

$$x^2 - mx = -n.$$

Równanie to daje też same wartości na x jakie znaleźliśmy poprzednio, mianowicie:

$$x_1 = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$$

$$x_2 = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}.$$

Biorąc x_1 jako pierwszą część, znajdziemy, że druga $m - x$ będzie równą $\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$, to jest x_2; biorąc znowuż x_2 za pierwszą część, znajdziemy, że druga będzie równą: $\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$, to jest x_1. Wogóle więc można odpowiedzieć na dane pytanie, że x_1 i x_2 przedstawiać będą dwie szukane części liczby m, których iloczyn jest n.

Użycie powyższych wzorów objaśniają następne przykłady:

Liczbę 10 podzielić na takie dwie części, aby iloczyn ich był równy 16.

Rozwiązując równanie: $x^2 - 10x + 16 = 0$, znajdziemy:

$$x_1 = 5 + \sqrt{25 - 16} = 8,$$

$$x_2 = 5 - 3 = 2.$$

Więc jedna z szukanych części jest 8 druga zaś 2.

Tęż samę liczbę 10 podzielić na takie dwie części aby iloczyn ich był 24.

Równanie do rozwiązania będzie:

$$x^2 - 10x + 24 = 0,$$

które rozwiązując, znajdziemy szukane części 6 i 4.

Gdybyśmy jeszcze tęż samę liczbę 10 chcieli podzielić na takie dwie części, których iloczyn byłby 25, wtedy rozwiązując równanie:

$$x^2 - 10x + 25 = 0,$$

znaleźlibyśmy, że szukane części są 5 i 5. Lecz gdybyśmy chcieli też samę liczbę 10 podzielić na takie dwie części, których iloczyn byłby większym od 25, np. 26, wtedy rozwiązując równanie: $x^2 - 10x + 26 = 0$, znaleźlibyśmy na x_1 i x_2 wartości zespolone:

$$5 + i \text{ i } 5 - i,$$

co pokazuje, że nie można liczby 10 podzielić na takie części, któreby zadosyć czyniły temu warunkowi, aby iloczyn ich tworzył 26. Z tego widzimy, że jakąkolwiek liczbę 10 można podzielić na takie dwie części rzeczywiste, których iloczyn może być bardzo rozmaity, z tem wszystkiem iloczyn ten nie może być większym od pewnej granicy: — taką granicą jest tutaj 25.

Do tegoż samego wypadku dochodzimy, rozbierając ogólne równanie, rozwiązujące nam to zadanie we wszystkich przypadkach, mianowicie: $x^2 - mx + n = 0$. Pierwiastki tego równania, jako to widzieliśmy, są:

$$x_1 = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n},$$

$$x_2 = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}.$$

Są one rzeczywiste dotąd, dopóki ilość pod znakiem pierwiastkowym $\frac{m^2}{4} - n$ nie jest ujemną, czyli dopóki n nie jest większe od $\frac{m^2}{4} = \left(\frac{m}{2}\right)^2$. Największą więc wartością na n może być $\left(\frac{m}{2}\right)^2$. Stąd wyprowadzamy taki wniosek: największy iloczyn z dwóch części stanowiących daną liczbę, jest wtedy, gdy obie te części są równe, to jest gdy każda jest połową danej liczby.

345. Jeżeli wyrażenie tego rodzaju jak: $3x^2 - 15x + 18$ przyrównamy do zera, wtedy otrzymamy równanie, w którem x może mieć tylko dwa znaczenia, będące pierwiastkami tegoż równania. Lecz jeżeli uważamy wyrażenie powyższe $3x^2 - 15x + 18$ samo w sobie, wtedy x może w niem przyjmować wszelkie znaczenia, jakie tylko chcemy mu nadać, i wtedy wyrażenie takie nazywamy *trójmianem stopnia drugiego.* W ogóle wyrażenie tej postaci $ax^2 + bx + c$, w którem a, b i c oznaczają pewne dane liczby stałe, a x liczbę mogącą się dowolnie zmieniać, nazywa się trójmianem stopnia drugiego. Trójmian ten ma ważną własność, którą tutaj poznamy.

Wyrażenie $ax^2 + bx + c$ można przedstawić w tej postaci: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$. Oznaczywszy tutaj dla krótkości $\frac{b}{a}$ jedną głoską p, a $\frac{c}{a}$ jedną głoską q, będzie:

$$ax^2 + bx + c = a\,(x^2 + px + q).$$

Ponieważ a jest liczbą stałą, przeto wszystkie własności rozważanego trójmianu $ax^2 + bx + c$, zależeć będzie od wyrażenia $x^2 + px + q$. To ostatnie zatem bierzemy pod uwagę.

Wyrażenie $x^2 + px + q$ nie zmieni się, jeżeli do niego dodamy i odejmiemy po $\frac{p^2}{4}$; otrzymamy tym sposobem:

$$x^2 + px + q = x^2 + px + q + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}.$$

Lecz trójmian $x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ stanowi zupełny kwadrat dwumianu $x + \frac{p}{2}$. Będzie więc:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q. \qquad \text{czyli:}$$

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right).$$

Jeżeli zaś zwrócimy uwagę na to, że wyciąganie pierwiastku kwadratowego i podnoszenie do kwadratu są działaniami odwrotnemi, wtedy zamiast $\frac{p^2}{4}-q$ będziemy mogli napisać $\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2$. Wprowadzając tę zmianę w wyrażenie powyższe otrzymamy:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2.$$

Stąd widzimy, że trójmian x^2+px+q może być przedstawiony pod postacią różnicy dwóch kwadratów. Lecz na zasadzie § 77 wiemy, że różnica kwadratów dwóch ilości jest równą iloczynowi z sumy tychże ilości przez ich różnicę; to jest oznaczając dwie ilości głoskami v i u mamy:

$$v^2-u^2=(v-u)\,(v+u).$$

Wyrażenie więc $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2$ możemy w podobny sposób zamienić na iloczyn, biorąc $x+\frac{p}{2}$ zamiast v i $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ zamiast u. Czyniąc to znajdziemy że:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right).$$

Lecz jeżeli trójmian x^2+px+q przyrównamy do zera, otrzymamy równanie stopnia drugiego:

$$x^2+px+q=0,$$

którego pierwiastki są:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Porównywając te piarwiastki z ilościami znajdującemi się w powyższych nawiasach widzimy, że:

$$-x_1=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$-x_2=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Podstawiając te wartości zamiast ilości zawartych w nawiasach, otrzymamy:

$$x^2+px+q=(x-x_1)\,(x-x_2).$$

Równość ta jest tożsamością, to jest ma miejsce przy wszystkich wartościach na x. Wyrazić ją można słowami tak: *Trójmian stopnia drugiego x^2+px+q jest równy iloczynowi dwóch czynników stopnia pierwszego: jednym z tych czynników jest x mniej jeden pierwiastek równania otrzymanego przez przyrównanie danego trójmianu do zera; drugi zaś — jest toż samo x mniej drugi pierwiastek tego samego równania.* Podług tego trójmian ax^2+bx+c może być tak wyrażony:

$$ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2).$$

1-szy przykład: trójmian $3x^2-15x+18$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego.

Będzie:

$$3x^2-15x+18=3\,(x-x_1)\,(x-x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 będą pierwiastkami równania:

$$3x^2-15x+18=0,$$

lub:

$$x^2-5x+6=0.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 2.$$

zatem: $\quad 3x^2 - 15x + 18 = 3\,(x-3)\,(x-2),$

o czem łatwo się można przekonać, przez bezpośrednie mnożenie, co uczący się powinien zrobić.

2-gi przykład: Trójmian $6x^2 - 5x - 6$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego.

Będzie:

$$6x^2 - 5x - 6 = 6\,(x - x_1)\,(x - x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami rownania:

$$6x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Rozwiązując je znajdziemy:

$$x_1 = -\frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{3}{2},$$

więc: $\quad 6x^2 - 5x - 6 = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right),$ czyli:

$$6x^2 - 5x - 6 = (3x + 2)\,(2x - 3).$$

3-ci przykład: Trójmian: $x^2 - 8x + 16$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego.

Będzie:

$$x^2 - 8x + 16 = (x - x_1)\,(x - x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami równania:

$$x^2 - 8x + 16 = 0.$$

Z rozwiązania tegoż równania mieć będziemy:

$$x_1 = 4 \text{ i } x_2 = 4;$$

zatem:

$$x^2 - 8x + 16 = (x-4)\,(x-4) = (x-4)^2,$$

co i bezpośrednio jest widocznem.

4-ty przykład: Trójmian: $x^2 + 10x + 34$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego.

Będzie:

$$x^2 + 10x + 34 = (x - x_1)\,(x - x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 znajdziemy rozwiązując równanie:

$$x^2 + 10x + 34 = 0.$$

Stąd $\quad x_1 = -5 + \sqrt{25 - 34} = -5 + \sqrt{-9},$

$$x_2 = -5 - \sqrt{-9}.$$

A że: $\quad \sqrt{-9} = 3\sqrt{-1} = 3i,$

przeto: $\quad x_1 = -5 + 3i,$

$$x_2 = -5 - 3i.$$

Trójmian więc dany nie może być rozłożony na czynniki rzeczywiste stopnia pierwszego. Jednak możemy i w tym razie napisać:

$$x^2 + 10x + 34 = (x + 5 - 3i)\,(x + 5 + 3i),$$

uważając $-5 + 3i$ i $-5 - 3i$ jako ilości zespolone, nad któremi działania podobne i w podobny sposób mogą być wykonywane, jak nad ilościami rzeczywistemi, przyjmując tylko, że $i^2 = -1$. Przez wykonanie działań wskazanych i z uwzględnieniem ostatniego warunku, t. j., że $i^2 = -1$: znajdziemy w samej rzeczy, że wypadek na drugiej stronie jest równy pierwszej stronie równości. W rozbiór bliższy wszakże działań z ilościami urojonemi wchodzić tutaj nie będziemy, pozostawiając to obszerniejszym dziełom o algebrze.

PRZYKŁADY XXXII.

1. $2\,(x^2 - 7) + 3\,(x^2 - 11) = 33.$

2. $\dfrac{x^2 - 24}{5} + \dfrac{x^2 - 37}{4} = 8.$ $\quad$ 3. $x^2 - 3x + 2 = 0.$

4. $2x^2 - 1 = 5x + 2.$ $\quad$ 5. $4\,(x^2 - 1) = 4x - 1.$

6. $x + \dfrac{1}{x - 3} = 5.$ $\quad$ 7. $\dfrac{x}{7} + \dfrac{21}{x + 5} = 6\,\dfrac{5}{7}.$

8. $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{9}{5}$.

9. $\frac{3}{2(x^2-1)} - \frac{1}{4(x+1)} = \frac{1}{8}$.

10. $(x+10)^2 = 144(100 - x^2)$.

11. $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{5x-11}{x-1}$.

12. $x - \frac{14x-9}{8x-3} = \frac{x^2-3}{x+1}$.

13. $a^2x^2 - 2a^3x + a^4 - 1 = 0$.

14. $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}$.

15. $(a+bx)(b-ax) + (b+cx)(c-bx) +$
$+ (c+ax)(a-cx) = 0$.

16. $\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$.

17. Wyrażenia: $x^2 - 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $x^3 + 16x^2 + 21x$ rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego.

XXXIII.

Równania dające się sprowadzić do równań stopnia drugiego.

346. Są pewne równania, które nie będąc właściwie równaniami stopnia drugiego, dają się jednak rozwiązać sposobem *dopełnienia do kwadratu.*

Podamy tutaj dwa przykłady takich równań.

347. Rozwiązać równanie: $x^6 - 7x^3 = 8$.

Dodajmy do obu stron równania po $\left(\frac{7}{2}\right)^2$; będzie:

$$x^6 - 7x^3 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 8 + \frac{49}{4} = \frac{81}{4};$$

wyciągając z obu stron pierwiastki kwadratowe otrzymamy:

$$x^3 - \frac{7}{2} = \pm\frac{9}{2},$$

skąd:

$$x^3 = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}, \text{ to jest: } x^3 = 8, \text{ lub: } x^3 = -1.$$

Nakoniec przez wyciągnięcie pierwiastku sześciennego znajdziemy: $x = 2$, lub $x = -1$.

348. Rozwiązać równanie:

$$x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 6.$$

Odejmijmy od obu stron równania po 2 będzie:

$$x^2 + 3x - 2 + 3\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 4.$$

Wtedy na pierwszej stronie równania otrzymaliśmy dwa wyrażenia: $\sqrt{x^2 + 3x - 2}$ i $x^2 + 3x - 2$, z których ostatnie jest kwadratem pierwszego.

Możemy teraz pierwszą stronę *dopełnić do kwadratu.* W tym celu dodajmy do obu stron po $\left(\frac{3}{2}\right)^2$; mieć będziemy:

$$x^2 + 3x - 2 + 3\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}.$$

Wyciągając pierwiastki kwadratowe z obu stron, będzie:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2};$$

skąd:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}, \qquad \text{czyli:}$$

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 1 \text{ lub} = -4.$$

Przyjmijmy najprzód, że:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 1.$$

Podnieśmy obie strony do kwadratu; będzie:

$$x^2 + 3x - 2 = 1.$$

Lecz to jest zwyczajne równanie stopnia drugiego, które rozwiązując, znajdziemy:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Przyjmijmy powtóre, że:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = -4.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu, mieć będziemy:

$$x^2 + 3x - 2 = 16.$$

To jest znowuż równanie stopnia drugiego, które rozwiązując znajdziemy:

$$x = 3, \text{ lub } x = -6.$$

Tym sposobem otrzymaliśmy ostatecznie cztery wartości na x, a mianowicie:

$$3, \quad -6, \quad \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Musimy tutaj zrobić ważną uwagę, odnoszącą się do tych wartości. Przypuśćmy, że chcemy rozwiązania sprawdzić. Jeżeli zamiast x podstawimy 3, wtedy znajdujemy, że $x^2 + 3x - 2 = 16$, a więc: $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \pm 4$. Jeżeli weźmiemy wartość $+4$, wtedy dane początkowo równanie nie będzie sprawdzone; — jeżeli zaś weźmiemy wartość -4, wtedy będzie ono sprawdzone. Podobnież jeżeli dalej podstawimy $x = -6$, wtedy przyjdziemy do tegoż samego wypadku. Można było przewidzieć oba te wypadki gdyż wartości $x = 3$, lub $x = -6$ były znalezione z równania $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = -4$, które to równanie było znowuż otrzymane z równania początkowego. Gdybyśmy teraz uczynili $x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$, wtedy mielibyśmy $x^2 + 3x - 2 = 1$, początkowe równanie będzie sprawdzone, gdy weźmiemy

$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = +1$. Znalezione wartości sprawdzają więc dwa następujące równania:

$$x^2 + 3x - 3\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 6,$$

i:

$$x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x - 2} = 6,$$

przyczem wartości 3 i -6 należą tylko do pierwszego równania, wartości zaś $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$ należą tylko do drugiego równania.

349. Mogą się przytrafić takie równania, które należy, po odpowiedniem przeniesieniu wyrazów, raz lub kilka razy podnieść do kwadratu, zanim zostaną one sprowadzone do równania stopnia drugiego. Podamy na takie działania dwa przykłady.

350. Rozwiązać równanie:

$$2x - \sqrt{x^2 - 3x - 3} = 9.$$

Przenieśmy wyraz zawierający pierwiastek na drugą, a 9 na pierwszą stronę równania; — będzie:

$$2x - 9 = \sqrt{x^2 - 3x - 3};$$

podnieśmy obie strony do kwadratu; otrzymamy:

$$4x^2 - 36x + 81 = x^2 - 3x - 3;$$

przenieśmy wszystkie wyrazy na pierwszą stronę:

$$3x^2 - 33x + 84 = 0,$$

czyli, po podzieleniu wszystkich wyrazów przez 3:

$$x^2 - 11x + 28 = 0.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy: $x = 7$ lub $x = 4$. Wartość 7 zadosyć czyni danemu równaniu: wartość 4 należy do równania $2x + \sqrt{x^2 - 3x - 3} = 9$.

351. Rozwiązać równanie:

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{8x+9}.$$

Podnieśmy obie strony do kwadratu; będzie:

$$x + 4 + 2x + 6 + 2\sqrt{(x+4)(2x+6)} = 8x + 9;$$

przenieśmy następnie wyrazy równania tak, aby na jednej stronie została tylko ilość pierwiastkowa sama, na drugiej zaś reszta wyrazów; — po zrobieniu uproszczeń będzie:

$$2\sqrt{(x+4)(2x+6)} = 5x - 1.$$

Podnieśmy znowuż obie strony do kwadratu; otrzymamy:

$$4(x+4)(2x+6) = 25x^2 - 10x + 1,$$

to jest: $\quad 8x^2 + 56x + 96 = 25x^2 - 10x + 1.$

Przenosząc zaś wszystkie wyrazy na pierwszą stronę będzie:

$$17x^2 - 66x - 95 = 0.$$

Rozwiązując to równanie znajdziemy, że $x = 5$, lub $x = -\frac{19}{17}$.

Wartość pierwsza, t. j. 5, zadosyć czyni danemu równaniu; — druga zaś $-\frac{19}{17}$ należy do równania:

$$\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+4} = \sqrt{8x+9},$$

które przez dwukrotne podniesienie do kwadratu prowadzi do tegoż samego równania, co i równanie dane.

352. Z poprzednich przykładów widać, że w tych przypadkach, w których należy podnosić do kwadratu, aby równanie sprowadzić do zwykłej postaci, — nigdy nie jesteśmy bez próby pewni, czy znalezione wartości na niewiadome są w samej rzeczy pierwiastkami danego równania.

Gdybyśmy np. mieli rozwiązać równanie:

$$\sqrt{x^2+x+1} + 1 = x,$$

to, postępując w podobny sposób, jak poprzednio, otrzymalibyśmy:

$$\sqrt{x^2+x+1} = x - 1$$

$$x^2 + x + 1 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

skąd: $\quad 3x = 0, \quad$ czyli $x = 0.$

Wartość ta jednak nie sprawdza danego równania, a zatem metoda wskazana, w tym wypadku, do celu nie prowadzi[1]).

353. Niekiedy się przytrafia, że rozwiązanie równania danego, może być ułatwione przez wprowadzenie pewnego uproszczenia, dającego się dostrzec na pierwszy rzut oka.

Następne dwa przykłady objaśnią, jakiego rodzaju są te uproszczenia.

354. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} = \frac{9+x}{9-x} - \frac{9-x}{9+x}.$$

Sprowadźmy ułamki na każdej stronie równania do jednakowego mianownika, otrzymamy:

$$\frac{(x+4)^2 - (x-4)^2}{x^2 - 16} = \frac{(9+x)^2 - (9-x)^2}{81 - x^2}$$

---

1) Można to wytłomaczyć w taki sposób: jeżeli równanie

$$A = B,$$

w którem A i B są jakiemikolwiek wyrażeniami algebraicznemi zawierającemi x, podnosimy do kwadratu:

$$A^2 = B^2,$$

to znaczy, że zamiast równania

$$A - B = 0$$

rozwiązujemy równanie:

$$A^2 - B^2 = 0.$$

To ostatnie można jednak tak napisać:

$$(A + B)(A - B) = 0.$$

Ażeby to równanie miało miejsce, wystarcza, aby jeden z czynników $A + B$ lub $A - B$ był równy 0, widoczną więc jest rzeczą, że wszystkie pierwiastki równania danego czynią ostatniemu zadość. Nie można jednak odwrotnie wnosić, że pierwiastki równania

$$A^2 - B^2 = 0$$

czynią zadość danemu, gdyż można natrafić na takie wartości x, które jedynie pierwszy czynnik, $A + B$, czynią równym 0.

czyli: $$\frac{16x}{x^2 - 16} = \frac{36x}{81 - x^2}.$$ [1]

Widoczną jest rzeczą teraz, że $x = 0$ jest pierwiastkiem równania. Aby wynaleść inne pierwiastki dzielimy obie strony przez $4x$; będzie:

$$\frac{4}{x^2 - 16} = \frac{9}{81 - x^2},$$

skąd: $4(81 - x^2) = 9(x^2 - 16)$,

i dalej: $13x^2 = 324 + 144 = 468$,

to jest: $x^2 = 36$,

i nakoniec: $x = \pm 6$.

Tym sposobem widzimy, że równanie dane ma trzy pierwiastki: 0, 6 i — 6.

355. Rozwiązać równanie:

$$x^3 - 7xa^2 + 6a^3 = 0.$$

Tutaj także jest widocznem, że $x = a$ jest pierwiastkiem równania. Równanie to możemy przedstawić w tej postaci:

$$x^3 - a^3 = 7a^2 (x - a).$$

Aby wynaleść inne pierwiastki podzielmy obie jego strony przez $x - a$. Znajdziemy:

$$x^2 + ax + a^2 = 7a^2.$$

Rozwiązując to równanie, które jest stopnia drugiego, otrzymamy $x = 2a$, lub $x = -3a$. Stąd widzimy, że równanie dane ma trzy pierwiastki, a mianowicie: a, $2a$, $-3a$.

---

[1] Jest to równanie tej postaci: $Ax = Bx$, czyli

$$Ax - Bx = 0, \quad \text{albo } x(A - B) = 0.$$

Jednym pierwiastkiem tego równauia jest więc $x = 0$, pozostałe znajdziemy, kładąc $A - B = 0$, czyli:

$$A = B.$$

356. Podamy tu jeszcze najgłówniejsze przypadki, w których równania innych stopni mogą być bezpośrednio sprowadzone do równań stopnia drugiego.

Do równań stopnia drugiego mogą być najprzód sprowadzone wszystkie równania tak zwane *trójwyrazowe*.

Pod tym wyrazem rozumiemy równania stopnia parzystego takie, w których po przeniesieniu wszystkich wyrazów na pierwszą stronę i zrobieniu wszelkich redukcyi, znajdować się będą tylko trojakiego rodzaju wyrazy: wyraz zawierający niewiadomą w stopniu parzystym, wyraz zawierający niewiadomą w stopniu dwa razy mniejszym od poprzedniego i wyraz wiadomy. Przykład takiego równania mamy w § 347. Inne przykłady: $3x^4 - 2x^2 + 9 = 0$ jest równaniem trójwyrazowem stopnia 4-go; $x^8 + 5x^4 - 3 = 0$, jest równaniem trójwyrazowem stopnia 8-go, w § 347 znajduje się przykład równania trójwyrazowego stopnia 6-go i t. d. Ogólna postać takiego równania jest:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0.$$

Rozwiązanie takich równań odrazu sprowadza się do rozwiązania równania stopnia 2-go przez uczynienie $x^n = y$. Wtedy: $x^{2n} = y^2$, i równanie dane zamieni się na następne:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Rozwiązując to równanie znajdziemy wiadomym sposobem dwa pierwiastki y_1 i y_2. A że $x^n = y$; więc $x = \sqrt[n]{y}$. Stąd widzimy, że po rozwiązaniu równania $ay^2 + by + c = 0$, należy tylko z wartości znalezionej na y wyciągnąć pierwiastek stopnia n. A ponieważ na y otrzymaliśmy dwie wartości, przeto: $x =$ albo $\sqrt[n]{y_1}$, albo też $x = \sqrt[n]{y_2}$. Jeżeli więc jesteśmy w stanie wynaleść pierwiastek potęgi n z y_1 i y_2, wtedy możemy otrzymać i wartości na x.

Jako przykład tego rodzaju równań weźmiemy równanie trójwyrazowe stopnia 4-go.

Rozwiązać równanie:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Czyniąc: $x^2 = y$, skąd: $x^4 = y^2$, otrzymamy z powyższego równania:

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Rozwiązując to równanie znajdziemy:

$$y_1 = 9;\ y_2 = 4.$$

Stąd: $x^2 = 9$, lub: $x^2 = 4$;

a zatem: $x = \pm\sqrt{9}$, lub: $x = \pm\sqrt{4}$.

Otrzymamy więc na x następne cztery wartości:

$$x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2.$$

Rozwiązać równanie:

$$x^4 - 12x^2 + 16 = 0.$$

Uczyńmy $x^2 = y$, wtedy: $x^4 = y^2$, i równanie powyższe zamieni się na:

$$y^2 - 12y + 16 = 0,$$

skąd:

$$y_1 = 6 + \sqrt{20},$$

$$y_2 = 6 - \sqrt{20}.$$

A zatem:

$$x^2 = 6 + \sqrt{20},$$

lub: $x^2 = 6 - \sqrt{20}$.

Wartości więc na x otrzymamy wyciągając pierwiastki kwadratowe z powyższych wyrażeń, i tym sposobem znajdziemy następujące cztery wartości na x:

$$x_1 = \sqrt{6 + \sqrt{20}},$$

$$x_2 = -\sqrt{6 + \sqrt{20}},$$

$$x_3 = \sqrt{6 - \sqrt{20}},$$

$$x_4 = -\sqrt{6 - \sqrt{20}}.$$

Wartości te przedstawiają się pod postacią wyrażeń rozbieranych w § 318, i mogą być przekształcone za pomocą wzorów tam podanych. Używając wzoru:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

do przekształcenia wartości na x_1, otrzymamy:

$$x_1 = \sqrt{5} + 1.$$

Podobnież znajdziemy:

$$x_2 = -\sqrt{5} - 1,$$

$$x_3 = \sqrt{5} - 1,$$

$$x_4 = -\sqrt{5} + 1.$$

357. Przez podobne podstawienie, jakiego użyliśmy do rozwiązania równania trójwyrazowego, można niejednokrotnie rozwiązywać i równania innego rodzaju, do których wchodzą wyrażenia pierwiastkowe, lub wykładniki ułamkowe. Tak np. przypuśćmy, że dane jest równanie:

$$\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} - 4 = 0.$$

Uczyńmy: $\sqrt[6]{x} = y$; wtedy: $\sqrt[3]{x} = y^2$; podstawiając te wartości w równanie dane, będzie:

$$y^2 + 3y - 4 = 0,$$

skąd: $y_1 = 1;\ y_2 = -4.$

A że $\sqrt[6]{x} = y$, przeto na x otrzymamy dwie następne wartości:

$$x_1 = {y_1}^6 = 1;\ x_2 = {y_2}^6 = 4096,$$

z których pierwsza czyni zadość równaniu danemu.

358. Powtóre: do równań stopnia drugiego mogą być sprowadzone równania *symetryczne* stopnia trzeciego, czwartego lub piątego.

Pod wyrazem równanie *symetryczne* rozumiemy równanie takie, w którem, po przeniesieniu wszystkich wyrazów na pierwszą stronę, zrobieniu wszelkich uproszczeń, i uporządkowaniu wyrazów podług potęg malejących głoski x, otrzymamy na pierwszej stronie wielomian całkowity taki, że współczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazów skrajnych są równe i ze znakami jednakowemi lub przeciwnemi, gdy wielomian jest stopnia nieparzystego; gdy zaś wielomian jest stopnia parzystego, wtedy współczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazów skrajnych są równe i z jednakowemi znakami *).

Tak np. równanie:

$$3x^2 + 2x + 3 = 0,$$

lub:

$$3x^2 - 2x + 3 = 0,$$

jest symetrycznem stopnia drugiego; równanie:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

jest równaniem symetrycznem stopnia czwartego i t. d.

359. Weźmy najprzód pod uwagę równanie symetryczne stopnia trzeciego:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

Z pierwszego i ostatniego wyrazu możemy w niem wyłączyć za nawias a, z drugiego i trzeciego bx; będzie:

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0.$$

Ponieważ:

$$(x^3 + 1) : (x + 1) = x^2 - x + 1,$$

(patrz § 90), przeto, wyłączając na pierwszej stronie $(x + 1)$ za nawias, otrzymamy:

$$(x + 1)\left[a(x^2 - x + 1) + bx\right] = 0.$$

To ostatnie równanie pokazuje nam, że x powinno mieć taką wartość, aby iloczyn z dwóch czynników $x + 1$ i $a(x^2 - x + 1) +$

---

*) Wszakże gdy wielomian jest stopnia parzystego i w nim brak średniego wyrazu, będzie on symetrycznym i wtedy, gdy współczynniki wyrazów równoodalonych od wyrazów skrajnych będą równe i ze znakami przeciwnemi, np.

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

$+ bx$ był równym zero. Lecz aby iloczyn z dwóch czynników stał stał się zerem, dostatecznem jest aby jeden z czynników był zerem. Wartości więc na x, zadosyć czyniące powyższemu równaniu będą takie, przy których albo:

$$x + 1 = 0,$$

albo:

$$a(x^2 - x + 1) + bx = 0.$$

Pierwsze równanie daje nam pierwszą wartość na x, mianowicie:

$$x_1 = -1;$$

z rozwiązania zaś drugiego równania, które można napisać tak:

$$ax^2 - (a - b)x + a = 0,$$

otrzymamy dwa inne pierwiastki:

$$x_2 = \frac{a - b + \sqrt{b^2 - 2ab - 3a^2}}{2a},$$

$$x_3 = \frac{a - b - \sqrt{b^2 - 2ab - 3a^2}}{2a}.$$

W podobny sposób można rozwiązać równanie:

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0,$$

wyłączając $x - 1$ za nawias ze strony pierwszej.

Przez pomnożenie licznika i mianownika wartości na x_3 przez $a - b + \sqrt{b^2 - 2ab - 3a^2}$, można się przekonać, że pomiędzy x_2 i x_3 istnieje taki związek:

$$x_2 = \frac{1}{x_3}.$$

360. Pokażemy teraz jak można rozwiązać równania symetryczne stopnia czwartego przez sprowadzenie ich do równań stopnia drugiego.

Ogólna postać takich równań jest:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Podzielmy obie strony tego równania przez x^2 *) i z wyrazów, mających jednakowe współczynniki, wyłączmy te współczynniki za nawias. Będzie:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Uczyńmy teraz:

$$x+\frac{1}{x}=y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wtedy podnosząc obie strony równania (1) do kwadratu otrzymamy:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2,$$

skąd:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2 \quad . \quad . \quad (2).$$

W równaniu więc danem możemy podstawić y^2-2 zamiast $x^2+\frac{1}{x^2}$ i y zamiast $x+\frac{1}{x}$, przez co mieć będziemy:

$$a(y^2-2)+by+c=0.$$

Równanie to jest stopnia drugiego; — rozwiązując je znajdziemy dwie wartości na y, mianowicie y_1 i y_2. Biorąc zamiast y w równaniu (1) kolejno y_1 i y_2, otrzymamy z tego równania dwa równania następne:

$$x+\frac{1}{x}=y_1,$$

i

$$x+\frac{1}{x}=y_2.$$

Każde z nich jest równaniem stopnia drugiego, i da dwie wartości na x. Tym sposobem otrzymamy cztery wartości na x zadosyć czyniące danemu równaniu.

*) Można to zrobić, ponieważ x w danem równaniu nie może być zerem.

O tych pierwiastkach, jakkolwiek ostatecznie nie oznaczyliśmy ich, możemy zrobić tęż samę uwagę, jaką zrobiliśmy o pierwiastkach równania symetrycznego stopnia trzeciego. Mianowicie nie trudno się przekonać, że jeżeli pewna ilość m zadosyć czyni temu równaniu, wtedy i $\frac{1}{m}$ także zadosyć czynić będzie temuż równaniu, czyli innemi słowy: jeżeli m jest pierwiastkiem równania:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,$$

wtedy i $\frac{1}{m}$ będzie także pierwiastkiem tegoż samego równania. W rzeczy samej: jeżeli m jest pierwiastkiem powyższego równania, to:

$$am^4+bm^3+cm^2+bm+a=0.$$

Lecz podstawiając $\frac{1}{m}$ zamiast x w wielomian:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a,$$

znajdziemy, że wartość tego wielomianu będzie:

$$\frac{a+bm+cm^2+bm^3+am^4}{m^4},$$

co jest równe zero z tej przyczyny, że licznik tego ułamka jest zerem podług przypuszczenia.

361. Nakoniec weźmy pod uwagę równanie symetryczne stopnia piątego:

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0,$$

lub:

$$ax^5-bx^4+cx^3-cx^2+bx-a=0.$$

Równania te można rozwiązać w ten sposób: Najprzód należy wyłączyć z wyrazu pierwszego i ostatniego a, z drugiego i piątego b, z trzeciego i czwartego c za nawias; będzie.

$$a(x^5+1)+b(x^4+x)+c(x^3+x^2)=0,$$

lub:

$$a(x^5-1)-b(x^4-x)+c(x^3-x^2)=0.$$

Następnie w równaniu pierwszej postaci można wyłączyć $(x+1)$ za nawias, a w równaniu drugiej postaci $(x-1)$ za nawias. Przyrównywając ten czynnik do zera otrzymamy jeden pierwiastek równania. Pierwiastek ten będzie w pierwszym przypadku równym -1, w drugim zaś 1. Pozostanie z każdego równania równanie symetryczne stopnia czwartego, które należy rozwiązać sposobem podanym wyżej.

362. Jeszcze jednej postaci równania stopnia czwartego dają się łatwo rozwiązać za pomocą równań stopnia drugiego.

Są to równania, które można sprowadzić do takiej postaci:

$$(x^2+ax)^2+p(x^2+ax)+q=0.$$

Czyniąc wtedy $y=x^2+ax$, otrzymamy równanie:

$$y^2+py+q=0,$$

z którego oznaczymy dwie wartości na y; następnie zaś z równania $y=x^2+ax$ znajdziemy i wartości na x: wartości tych będzie cztery.

W praktyce aby poznać czy równanie stopnia czwartego da się sprowadzić do powyższej postaci, należy dwa pierwsze jego wyrazy dopełnić do kwadratu (§ 324). Np. przypuśćmy, że mamy równanie:

$$x^4-12x^3+49x^2-78x+40=0.$$

Dwa pierwsze wyrazy: x^4-12x^3 uważamy jako dwa pierwsze wyrazy kwadratu dwumianu, i dopełniamy je do kwadratu zupełnego przez dodanie $(6x)^2$; — oczywiście tenże sam kwadrat należy od wielomianu odjąć. Czyniąc to, otrzymamy:

$$x^4-12x^3+(6x)^2-36x^2+49x^2-78x+40=0.$$

czyli:

$$(x^2-6x)^2+13(x^2-6x)+40=0.$$

Czyniąc teraz:

$$y=x^2-6x$$

otrzymamy:

$$y^2+13y+40=0,$$

skąd:

$$y_1=-5,$$
$$y_2=-8.$$

Następnie rozwiązując każde z dwóch równań:

$$x^2-6x=-5,$$

i:

$$x^2-6x=-8,$$

znajdziemy wartości na x, które będą takie:

$$x_1=5;\quad x_2=1;\quad x_3=4;\quad x_4=2.$$

363. Podamy tu jeszcze kilka przykładów rozwiązania takich równań, które nie należą do żadnej z powyższych kategoryi, a jednak przez szczególne podstawienie, lub przekształcenie dadzą się sprowadzić do równań stopnia drugiego.

Na nieszczęście nie można dać ogólnych zasad takich podstawień i przekształceń w przypadkach więcej złożonych: wprawa jedynie, nabyta przez przerabianie znacznej liczby zadań, może nasuwać odpowiednie sposoby i przekształcenia prowadzące do celu.

Rozwiązać równanie:

$$(a+x)^{\frac{2}{3}}+6(a-x)^{\frac{2}{3}}=5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Przenieśmy drugą stronę na pierwszą i wyłączmy ze wszystkich wyrazów $(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$ za nawias. Otrzymamy:

$$(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{(a+x)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}}+6\frac{(a-x)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}}-5\right]=0.$$

Lecz aby iloczyn z dwóch czynników był równym zero potrzeba, aby jeden z tychże czynników stał się zerem.

Czynnik pierwszy: $(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$ przyrównany do zera daje wartość na x równą $\pm a$; lecz widoczną jest rzeczą, że ta wartość nie sprawdza danego równania, gdyż podstawienie a zamiast x nie czyni pierwszej strony równą drugiej. Pierwiastki zatem równania danego mogą być otrzymane tylko z przyrównania drugiego czynnika do zera, to jest z równania:

$$\frac{(a+x)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}} + 6\,\frac{(a-x)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}} - 5 = 0.$$

A ponieważ $a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$, przeto powyższe równanie może być tak napisane:

$$\frac{(a+x)^{\frac{2}{3}}}{(a+x)^{\frac{1}{3}}(a-x)^{\frac{1}{3}}} + 6\,.\,\frac{(a-x)^{\frac{2}{3}}}{(a+x)^{\frac{1}{3}}(a-x)^{\frac{1}{3}}} - 5 = 0,$$

czyli skracając pierwszy ułamek przez $(a+x)^{\frac{1}{3}}$, a drugi przez $(a-x)^{\frac{1}{3}}$, otrzymamy:

$$\frac{(a+x)^{\frac{1}{3}}}{(a-x)^{\frac{1}{3}}} + 6\,\frac{(a-x)^{\frac{1}{3}}}{(a+x)^{\frac{1}{3}}} - 5 = 0,$$

co można i tak napisać:

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}} + 6\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{\frac{1}{3}} - 5 = 0.$$

Czyniąc tutaj:

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}} = y, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

otrzymamy: $$y + \frac{6}{y} - 5 = 0,$$

skąd: $$y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Rozwiązując to równanie stopnia drugiego, mieć będziemy:

$$y_1 = 2; \quad y_2 = 3.$$

Podstawiając teraz kolejno każdą z tych wartości w równanie (1), otrzymamy:

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}} = 2, \text{ lub: } \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}} = 3.$$

Aby rozwiązać pierwsze z tych równań, podnieśmy obie jego strony najprzód do sześcianu; znajdziemy:

$$\frac{a+x}{a-x} = 8; \quad \text{skąd } x_1 = \frac{7}{9}\,a.$$

Podobnie podnosząc obie strony drugiego równania do sześcianu i rozwiązując otrzymane stąd równanie, mieć będziemy drugą wartość na x a mianowicie:

$$x_2 = \frac{13}{14}\,a.$$

Inny przykład. Rozwiązać równanie:

$$x + 2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)+x} + 10ab = 0.$$

Uczyńmy:

$$\sqrt{3(a^2+b^2)+x} = y, \text{ wtedy: } x = y^2 - 3(a^2+b^2),$$

i podstawmy te wartości w dane równanie. Będzie:

$$y^2 + 2(a+b)\,y + 10ab - 3(a^2+b^2) = 0.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy:

$$y_1 = -(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 - 10ab + 3a^2 + 3b^2},$$

czyli: $$y_1 = -a - b + 2a - 2b = a - 3b.$$

Podobnie: $$y_2 = b - 3a.$$

Podstawiając te wartości kolejno w równość:

$$x = y^2 - 3(a^2+b^2),$$

znajdziemy: $$x_1 = y_1{}^2 - 3(a^2+b^2),$$

czyli: $$x_1 = (a-3b)^2 - 3a^2 - 3b^2,$$

albo: $x_1 = -2a^2 - 6ab + 6b^2.$

I podobnie: $x_2 = (b - 3a)^2 - 3(a^2 + b^2),$

skąd: $x_2 = -2b^2 - 6ab + 6a^2.$

Trzeci przykład. Rozwiązać równanie:

$$\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x-a} = m.$$

Podnieśmy obie strony tego równania do potęgi trzeciej. Na zasadzie wzoru:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

czyli:

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b),$$

otrzymamy:

$$(x+a) - (x-a) - 3\sqrt[3]{x^2-a^2}\,[\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x-a}] = m^3,$$

czyli, upraszczając i podstawiając m zamiast

$$\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x-a},$$

będzie:

$$2a - 3m\sqrt[3]{x^2-a^2} = m^3,$$

skąd:

$$3m\sqrt[3]{x^2-a^2} = 2a - m^3,$$

i:

$$\sqrt[3]{x^2-a^2} = \frac{2a-m^3}{3m}.$$

Podnosząc teraz obie strony do potęgi trzeciej i przenosząc a^2 na drugą stronę znajdziemy:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{2a-m^3}{3m}\right)^3,$$

skąd nakoniec:

$$x = \pm\sqrt{a^2 + \left(\frac{2a-m^3}{3m}\right)^3}.$$

Następujące zadanie, jako wymagające wykonania pewnych działań z ilościami urojonemi, właściwie przechodzi zakres tej książki. Ponieważ jednak działania te są bardzo proste, i ilości urojone występują tylko przechodnio, znikając z ostatecznych wypadków, przeto dla przykładu rozwiążemy i to zadanie.

Rozwiązać równanie.

$$\sqrt{x}\,.\sqrt[4]{x^2-1} - 2x\sqrt{x^2-1} = 0{,}25.$$

W tym celu uczyńmy:

$$\sqrt{x}\,.\sqrt[4]{x^2-1} = y,$$

skąd: $x\sqrt{x^2-1} = y^2.$

Podstawiając te wartości w równanie dane mieć będziemy:

$$y - 2y^2 = 0{,}25,$$

czyli: $2y^2 - y = -\frac{1}{4}.$

Przez rozwiązanie tego równania otrzymamy:

$$y = \frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{1}{16}},$$

to jest:

$$y_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{-1},$$

$$y_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{-1};$$

co można i tak napisać (§ 322):

$$y_1 = \frac{1}{4}(1+i),$$

$$y_2 = \frac{1}{4}(1-i).$$

Z równania warunkowego:

$$\sqrt{x}\,.\sqrt[4]{x^2-1} = y$$

przez podniesienie do potęgi czwartej, otrzymamy:

$$x^4 - x^2 = y^4\,;$$

A że y ma dwie wartości y_1 i y_2, przeto dla znalezienia x mieć będziemy dwa równania

$$x^4 - x^2 = \left[\frac{1}{4}(1+i)\right]^4,$$

i:

$$x^4 - x^2 = \left[\frac{1}{4}(1-i)\right]^4.$$

Lecz $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$; aby zaś podnieść $1+i$ do potęgi czwartej podnieśmy je najprzód do kwadratu i następnie kwadrat znaleziony znowuż podnieśmy do kwadratu. Będzie:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2.$$

Lecz ponieważ podług § 322 $i^2 = -1$; przeto:

$$(1+i)^2 = 2i;$$

a następnie:

$$(1+i)^4 = 4i^2 = -4.$$

W podobny sposób znajdziemy:

$$(1-i)^4 = -4.$$

Oba więc powyższe równania zamienią się na następne:

$$x^4 - x^2 = -\frac{1}{64}.$$

Czyniąc tutaj $x^2 = u$, będzie:

$$u^2 - u = -\frac{1}{64},$$

skąd:

$$u = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{15}{64}},$$

czyli:

$$u = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{8}\sqrt{15}.$$

Następnie zaś:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{8}\sqrt{15}},$$

czyli:

$$x = \pm\frac{1}{4}\sqrt{8 \pm \sqrt{60}}.$$

Każdy z tych czterech pierwiastków może być przekształcony za pomocą wzoru na $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, gdyż $a^2 - b$, równe tutaj $8^2 - 60$, jest zupełnym kwadratem. To przekształcenie jednak pozostawiamy czytelnikowi.

PRZYKŁADY XXXIII.

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$ 2. $x + \sqrt{x+5} = 7.$
3. $x^4 - 2x^3 + x^2 = 36.$
4. $x^4 - 4x^2 - 2\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} = 31.$
5. $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} = \sqrt{x}.$
6. $2x\sqrt{a + x^2} + 2x^2 = a^2 - a.$
7. $\dfrac{x + \sqrt{12a^2 - x}}{x - \sqrt{12a^2 - x}} = \dfrac{a+1}{a-1}.$
8. $\dfrac{1}{x+7} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-7} = 0.$
9. $x^3 + 3ax^2 = 4a^3.$
10. $\dfrac{\sqrt{x}}{21 - \sqrt{x}} + \dfrac{21 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2\frac{1}{2}.$
11. $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 20.$ 12. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$
13. $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0.$
14. $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0.$

XXXIV.

Zagadnienia prowadzące do równań stopnia drugiego.

364. Znaleść dwie liczby, których suma jest równą 15, i których iloczyn jest równy 54.

Niech x oznacza jednę liczbę; — wtedy $15 - x$ będzie drugą liczbą: — podług drugiego warunku ma być:

$$x(15 - x) = 54.$$

Stąd, po odpowiedniem przeniesieniu:

$$x^2 - 15x = -54;$$

i dalej: $$x^2 - 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = -54 + \frac{225}{4} = \frac{9}{4}.$$

Wyciągając pierwiastki kwadratowe:

$$x - \frac{15}{2} = \pm \frac{3}{2},$$

skąd: $$x = \frac{15}{2} \pm \frac{3}{2},$$

czyli: $$x = 9, \text{ lub } x = 6.$$

Biorąc $x = 9$, otrzymujemy $15 - x = 6$; jeżeli znowuż weźmiemy $x = 6$, otrzymamy $15 - x = 9$. Dwie te więc liczby szukane są 6 i 9. I jakkolwiek równanie stopnia drugiego daje dwie wartości na x, tutaj jest w rzeczywistości jedno tylko rozwiązanie. *)

365. Wydał ktoś pewną liczbę rubli na zakupienie towaru, który następnie sprzedał ze stratą za 24 ruble. Przy sprzedaży stracił tyle rubli *od sta*, ile go kosztował towar. Ileż kosztował ten towar?

Niech x oznacza liczbę rubli wydanych na towar; wtedy $x - 24$ oznaczać będzie liczbę rubli straconych. Podług warunków zadania strata od sta wynosi tyle rubli, ile kosztował towar, zatem x od sta; więc wyraża się ułamkiem $\frac{x}{100}$ ceny towaru. Równanie przeto będzie takie:

$$x \times \frac{x}{100} = x - 24,$$

skąd: $$x^2 - 100x = -2400.$$

Rozwiązując je znajdziemy, że $x = 40$ lub $x = 60$ Stąd wypada, że wydana liczba rubli była albo 40, albo też 60; — i każda z tych liczb zadosyć czyni wszystkim warunkom zagadnienia.

366. Sumę 144 rb. rozdzielono pomiędzy pewną liczbę osób tak, że każda z tych osób otrzymała tęż samę liczbę rubli. Gdyby było o dwie osoby mniej, wtedy przy takim podziale, każda dostałaby o jednego rubla więcej. Znaleść ile było osób.

Oznaczmy przez x liczbę osób; wtedy to co otrzymała każda z nich wyrazi się przez $\frac{144}{x}$ rubli. Gdy było $x - 2$ osoby, wtedy każda z nich dostałaby $\frac{144}{x-2}$ ruble. Zatem, podług warunków zadania będzie:

$$\frac{144}{x-2} = \frac{144}{x} + 1.$$

Znosząc mianowniki:

$$144x = 144(x - 2) + x(x - 2);$$

skąd: $$x^2 - 2x = 288.$$

Rozwiązując to równanie stopnia drugiego znajdziemy, że $x = 18$, lub $x = -16$. Stąd wypada, że osób było 18, gdyż to jest jedyna liczba, która zadosyć czyni warunkom zadania.

Czytelnik bezwątpienia zapyta się, czy można jakiekolwiek znaczenie nadać drugiemu pierwiastkowi, mianowicie

*) Porównaj § 344.

— 16; aby na to pytanie odpowiedzieć, rozwiążemy inne zagadnienie, ściśle związane z tem, które dopiero co rozwiązaliśmy.

367. Suma 144 rb. była rozdzieloną równo pomiędzy pewną liczbę osób; gdyby było o dwie osoby *więcej*, wtedy każda otrzymałaby o jednego rubla *mniej*. Ileż było osób?

Oznaczmy przez x liczbę osób. Wtedy, rozumując tak jak wyżej, otrzymamy równanie:

$$\frac{144}{x+2} = \frac{144}{x} - 1;$$

czyli:

$$x^2 + 2x = 288,$$

a rozwiązując je, znajdziemy:

$$x = 16, \quad \text{lub} \quad x = -18.$$

W poprzedniem zagadnieniu otrzymaliśmy jeden pierwiastek, dający odpowiedź na pytanie, mianowicie 18, i jeden pierwiastek, nie należący do zagadnienia, mianowicie —16; i w teraźniejszym zagadnieniu otrzymaliśmy także jeden pierwiastek należący do zadania, mianowicie 16, i drugi, nie należący do niego, mianowicie —18.

368. Przy rozwiązywaniu zagadnień przytrafia się często, jak to miało miejsce w § 366, że otrzymujemy wypadki, które nie dadzą się zastosować do zagadnienia. Pochodzi to stąd, że algebraiczne wyrażenie ma znaczenie ogólniejsze, aniżeli język zwykły, i tym sposobem równanie, będące właściwie przedstawieniem warunków zagadnienia, może być zastosowanem i do innych warunków. Zresztą uczący się z doświadczenia przekona się, że zawsze można wybrać ten pierwiastek, który należy do zagadnienia rozwiązywanego. Nadto w wielu przypadkach możliwą jest rzeczą. przez stosowną zmianę warunków zagadnienia, ułożyć nowe zagadnienie, odpowiadające temu pierwiastkowi, który nie należał do zagadnienia początkowego.

Przykład tego mieliśmy w § 367; podamy tutaj jeszcze inne zadanie tego samego rodzaju.

369. Kupił ktoś za 24 ruble pewną liczbę kóp jajek. Gdyby za tęż sumę dostał o 4 kopy więcej, wtedy cena jednej kopy byłaby o 30 kop. niższą. Znaleść cenę jednej kopy?

Niech x oznacza liczbę kopiejek, wyrażającą cenę jednej kopy. Wtedy $\frac{2400}{x}$ będzie liczbą kupionych kóp. Gdyby cena jednej kopy była o 30 kopiejek niższą, wtedy za tęż sumę pieniędzy 24 rb. możnaby kupić $\frac{2400}{x-30}$ kóp. Lecz, podług warunków zagadnienia, liczba kupionych kóp w tym drugim razie byłaby o 4 większą od pierwszej, zatem otrzymamy równanie:

$$\frac{2400}{x-30} = \frac{2400}{x} + 4$$

stąd:

$$2400x = 2400\,(x-30) + 4x\,(x-30),$$

czyli:

$$2400x = 2400x - 72000 + 4x^2 - 120x.$$

Przenosząc wyrazy niewiadome na pierwszą stronę, zmieniając znaki i robiąc wszystkie uproszczenia, otrzymamy:

$$x^2 - 30x = 18000.$$

Z tego równania znajdujemy na x dwie wartości: 150 i —120. Zatem jedna kopa kosztuje 150 kop. Moglibyśmy dalej znaleść, że 120 kop. jest odpowiedzią na następne zagadnienie: kupiono za 24 rb. pewną liczbę kóp jajek; gdyby za tęż samę sumę otrzymano o 4 *mniej;* wtedy cena jednej kopy byłaby o 30 kop. *wyższą.* Znaleść ile kosztuje kopa?

PRZYKŁADY XXXIV.

1. Liczbę 60 podzielić na takie dwie części, aby iloczyn ich był 864.

2. Suma dwóch liczb jest 60, suma zaś ich kwadratów jest 1872 — znaleść te dwie liczby.

3. Znaleść dwie liczby, których różnica jest równą 6. i których iloczyn jest 720.

4. Znaleść liczbę, która dodana do swojego pierwiastku kwadratowego, dałaby na sumę 210.

5. Zbiornik może być napełniony wodą, wpływającą dwiema rurami w ciągu 4 godzin: znaleść w ilu godzinach mógłby być zbiornik napełniony przez każdą z tych rur oddzielnie, jeżeli jedna rura napełniłaby go o 6 godzin prędzej aniżeli druga.

6. Bok kwadratu ma 110 cali długości; znaleść długość i szerokość prostokąta, którego obwód jest o 4 cale dłuższy od powierzchni kwadratu a powierzchnia o 4 cale mniejszą od powierzchni kwadratu.

7. Dwóch posłańców A i B wysłano w tej samej chwili do miejsca odległego o 90 wiorst; pierwszy przebywał o jednę wiorstę więcej na godzinę aniżeli drugi i wskutek tego przejechał całą odległość o godzinę prędzej aniżeli drugi. Znaleść po ile wiorst na godzinę przebywał każdy.

8. Dwaj podróżni wychodzą jednocześnie z tego samego punktu i jeden idzie ku północy z prędkością $4\frac{1}{2}$ wiorst na godzinę, a drugi ku wschodowi z prędkością 6 wiorst na godzinę. Po ilu godzinach odległość pomiędzy nimi będzie 30 wiorst?

9. Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym po ramionach kąta prostego: jedno z prędkością c metrów, drugie zaś z prędkością c_1 metrów na sekundę, przyczem oba wyszły jednocześnie z wierzchołka kąta prostego. Po ilu sekundach odległość pomiędzy nimi będzie d metrów?

10. Za domem znajduje się plac ogrodzony, mający długości 70 metrów i szerokości $52\frac{1}{2}$ metra. Właściciel domu chciałby plac ten zasadzić kwiatami, żona jego zaś wolałaby zamienić go na trawnik. Aby życzeniom obojga w równej mierze zadosyć uczynić, polecono ogrodnikowi założyć na środku placu trawnik prostokątny, którego obwód jest wszędzie jednakowo oddalony od ogrodzenia, i którego powierzchnia byłaby równą powierzchni pozostałej części ogrodu. Jakaż będzie długość i jaka szerokość trawnika?

11. Dwie osoby A i B wychodzą z miasta M do miasta R z tą samą prędkością, ale osoba A wcześniej wyszła aniżeli B. Przy trzecim słupie milowym *przed miastem* R, osoba A mija stado gęsi, które szło przed nią z prędkością $\frac{1}{6}$ mili na godzinę. W pół godziny potem taż sama osoba A spotyka stado owiec, idących w tym samym kierunku z prędkością $\frac{1}{5}$ mili na godzinę. Osoba B dogania gęsi w miejscu położonem na $2\frac{1}{2}$ mili przed miastem R; owce zaś na 10 minut przed dojściem do drugiego słupa milowego przed miastem R. Pytanie z jaką szli prędkością podróżni A i B?

XXXV.

Równania jednoczesne stopnia drugiego.

370. Przedstawimy tutaj kilka przykładów rozwiązania równań jednoczesnych stopnia drugiego. Rozbierzemy szczególniej dwa przypadki, najczęściej przytrafiające się w praktyce, i podamy prawidło na ich rozwiązanie. W obu tych przykładach są dane dwa równania z dwiema niewiadomemi. Ilości niewiadome zawsze oznaczone będą głoskami x i y.

371. *Przypadek pierwszy.* Przypuśćmy że jedno z równań danych jest stopnia pierwszego, a drugie jest stopnia drugiego.

Prawidło: *Z równania stopnia pierwszego należy wynaleść wartość na jednę z niewiadomych. Wartość tę która będzie wyrażoną za pomocą drugiej niewiadomej, podstawić w równanie stopnia drugiego.*

Naprzykład: Rozwiązać równania:

$$3x + 4y = 18; \quad 5x^2 - 3xy = 2.$$

Z pierwszego równania będzie:

$$y = \frac{18 - 3x}{4};$$

podstawmy tę wartość w równanie drugie; otrzymamy:

$$5x^2 - \frac{3x(18 - 3x)}{4} = 2,$$

skąd: $20x^2 - 54x + 9x^2 = 8,$

i następnie: $29x^2 - 54x = 8.$

Z tego równania stopnia drugiego znajdujemy: $x = 2$, lub $-\frac{4}{29}$, a podstawiając te wartości w wyrażenie na y, otrzymamy $y = 3$, lub $\frac{267}{58}$.

372. Rozwiązać równania:

$$3x^2 + 5x - 8y = 36, \quad 2x^2 - 3x - 4y = 3.$$

Jakkolwiek tutaj żadne z danych równań nie jest stopnia pierwszego, z tem wszystkiem możemy z nich wyprowadzić równanie stopnia pierwszego.

Gdyż pomnożywszy pierwsze równanie przez 2 a drugie przez 3, otrzymamy:

$$6x^2 + 10x - 16y = 72,$$
$$6x^2 - 9x - 12y = 9.$$

Odejmijmy równanie drugie od pierwszego, będzie:

$$10x - 16y + 9x + 12y = 72 - 9,$$

czyli: $19x - 4y = 63.$

Z tego równania mamy:

$$y = \frac{19x - 63}{4},$$

co podstawiwszy w pierwsze z danych równań otrzymamy:

$$3x^2 + 5x - 2(19x - 63) = 36.$$

Przekształcając to równanie otrzymamy w dalszym ciągu:

$$3x^2 - 33x + 90 = 0,$$

skąd: $x^2 - 11x + 30 = 0.$

Z tego równania znajdziemy, że $x = 5$ lub 6; a następnie przez podstawienie kolejne tych wartości w wyrażenie na y znajdziemy, że $y = 8$, lub $y = 12\frac{3}{4}$.

373. *Przypadek drugi.* Gdy wyrazy zawierające ilości niewiadome w każdem równaniu stanowią wyrażenie jednorodne stopnia drugiego (patrz § 23).

Prawidło: *Należy uczynić $y = vx$ i następnie podstawić tę wartość w oba równania: wtedy przez podzielenie ich odpowiedniemi stronami, otrzymamy równanie, z którego można oznaczyć v.*

Naprzykład: Rozwiązać równania:

$$x^2 + xy + 2y^2 = 44; \quad 2x^2 - xy + y^2 = 16.$$

Uczyńmy $y = vx$ i podstawmy tę wartość na y w oba równania: otrzymamy:

$$x^2(1 + v + 2v^2) = 44, \quad x^2(2 - v + v^2) = 16.$$

Dzieląc odpowiedniemi stronami te równania, będzie:

$$\frac{1 + v + 2v^2}{2 - v + v^2} = \frac{44}{16} = \frac{11}{4}.$$

Stąd: $4(1 + v + 2v^2) = 11(2 - v + v^2),$

i następnie: $3v^2 - 15v + 18 = 0;$

dzieląc zaś całe równanie przez 3, wypadnie:

$$v^2 - 5v + 6 = 0.$$

Z tego równania otrzymamy $v = 2$, lub $v = 3$. W równanie $x^2(1 + v + 2v^2) = 44$, podstawmy 2 zamiast v, znajdziemy $x = \pm 2$; a że $y = vx$, przeto otrzymamy: $y = \pm 4$. Podstawmy dalej w tem samem równaniu 3 zamiast v; mieć będziemy z niego: $x = \pm\sqrt{2}$. A że: $y = vx$, zatem $y = \pm 3\sqrt{2}$.

Lub też moglibyśmy postępować i tak:

Pomnóżmy pierwsze z danych równań przez 2, będzie:

$$2x^2 + 2xy + 4y^2 = 88;$$

drugie zaś równanie jest:

$$2x^2 - xy + y^2 = 16.$$

Przez odjęcie tych równań znajdziemy:

$$3xy + 3y^2 = 72,$$

czyli:

$$y^2 = 24 - xy.$$

I dalej pomnóżmy drugie równanie przez 2 i odejmijmy od niego równanie pierwsze; będzie:

$$3x^2 - 3xy = -12,$$

skąd:

$$x^2 = xy - 4.$$

Stąd, przez mnożenie:

$$x^2y^2 = (24 - xy)(xy - 4),$$

czyli:

$$2x^2y^2 - 28xy = -96.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy: $xy = 8$, lub $xy = 6$. Podstawiając pierwszą wartość w dane równanie, otrzymamy:

$$x^2 + 2y^2 = 36, \quad 2x^2 + y^2 = 24.$$

Stąd znajdziemy x^2 i y^2. W podobny sposób można wziąć drugą wartość na xy i następnie wynaleść x^2 i y^2.

374. Rozwiązać równania:

$$2x^2 + 3xy + y^2 = 70; \quad 6x^2 + xy - y^2 = 50.$$

Uczyńmy: $y = vx$, i podstawmy zamiast y tę wartość w oba równania; będzie:

$$x^2(2 + 3v + v^2) = 70; \quad x^2(6 + v - v^2) = 50.$$

Dzieląc odpowiedniemi stronami te dwa równania, otrzymamy:

$$\frac{2 + 3v + v^2}{6 + v - v^2} = \frac{70}{50} = \frac{7}{5},$$

skąd:

$$5(2 + 3v + v^2) = 7(6 + v - v^2),$$

i następnie:

$$12v^2 + 8v - 32 = 0,$$

czyli:

$$3v^2 + 2v - 8 = 0.$$

Z tego równania znajdziemy $v = \frac{4}{3}$ lub $v = -2$.

Podstawmy w równanie $x^2(2 + 3v + v^2) = 70$, $\frac{4}{3}$ zamiast v, wtedy otrzymamy $x = \pm 3$. A ponieważ $y = vx$, więc $y = \pm 4$. Wartość $v = -2$ nie może tutaj być zastosowaną, gdyż prowadzi do niemożliwego wypadku $x^2 \times 0 = 70$. W rzeczy samej: równania, z których wartość na v była wynalezioną, mogą być tak napisane:

$$x^2(2 + v)(1 + v) = 70, \quad x^2(2 + v)(3 - v) = 50.$$

Z nich widzimy, że wartość na v, znaleziona z równania $2 + v = 0$, nie daje się tutaj zastosować, może być tylko:

$$\frac{1 + v}{3 - v} = \frac{70}{50} = \frac{7}{5}, \text{ skąd: } v = \frac{4}{3}.$$

375. Oprócz równań należących do tych przypadków, które dopiero co rozważaliśmy, mogą się przytrafić równania, które jakkolwiek nie dadzą się pod żaden z nich podciągnąć, wszakże mogą być rozwiązane sposobami szczególnymi. Jakiego użyć w tym celu sposobu w każdym przypadku, może nas nauczyć tylko wprawa i doświadczenie. Podamy tutaj kilka tego rodzaju przykładów.

376. Rozwiązać równania:

$$x + y = 5; \quad x^3 + y^3 = 65.$$

Przez dzielenie otrzymamy:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = \frac{65}{5},$$

czyli:

$$x^2 - xy + y^2 = 13.$$

Z tego równania, połączonego z równaniem $x + y = 5$, możemy znaleźć x i y tak jak w pierwszym przypadku. Albo też możemy uzupełnić rozwiązanie w ten sposób:

$$x + y = 5.$$

podnieśmy obie strony do kwadratu:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 25 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A że nadto:

$$x^2 - xy + y^2 = 13, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

przeto odejmując (2) od (1), będzie:

$$3xy = 12,$$

a następnie: $$xy = 4,$$

skąd: $$4xy = 16 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Odejmijmy (3) od (1); otrzymamy:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 9;$$

wyciągnijmy z obu stron tego ostatniego równania pierwiastki kwadratowe, będzie:

$$x - y = \pm 3.$$

Należy teraz znaleść x i y z równań stopnia pierwszego:

$$x + y = 5, \quad \text{i} \quad x - y = \pm 3.$$

Równania te dają takie wartości na x i y:

$$x = 1, \quad \text{lub:} \quad x = 4,$$
$$y = 4, \quad \text{lub:} \quad y = 1.\text{*)}$$

377. Rozwiązać równania:

$$x^2 + y^2 = 41; \quad xy = 20.$$

---

*) Gdy już otrzymaliśmy wartość na xy, można także dokończyć rozwiązania z dwóch równań:

$$x + y = 5, \quad \text{i} \quad xy = 4,$$

opierając się na zadaniu § 344. Mianowicie: równania te dają nam sumę i iloczyn ilości szukanych; pierwiastki więc równania:

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

będą szukanemi ilościami.

Równania te mogą być rozwiązane tak, jak równania w drugim przypadku (§ 373), albo też można je rozwiązać w sposób dopiero co pokazany. Gdyż z nich możemy odrazu wyprowadzić:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 41 + 40 = 81,$$
$$x^2 + y^2 - 2xy = 41 - 40 = 1;$$

wyciągając więc pierwiastki kwadratowe otrzymamy:

$$x + y = \pm 9, \quad \text{i} \quad x - y = \pm 1;$$

stąd ostatecznie znajdziemy:

$$x = \pm 5, \quad \text{lub:} \quad x = \pm 4,$$

i $$y = \pm 4, \quad \text{lub:} \quad y = \pm 5.$$

378. Rozwiązać równania:

$$x^2 + xy + y^2 = 19, \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133.$$

Z podzielenia jednego równania przez drugie mamy:

$$\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2} = \frac{133}{19},$$

czyli: $$x^2 - xy + y^2 = 7.$$

Tym sposobem mamy teraz do rozwiązania dwa równania:

$$x^2 + xy + y^2 = 19, \quad x^2 - xy + y^2 = 7.$$

Dodając i odejmując kolejno dwa te równania otrzymamy:

$$x^2 + y^2 = 13, \quad xy = 6.$$

Postępując dalej tak, jak w § 377, znajdziemy że:

$$x = \pm 3, \quad \text{lub:} \quad x = \pm 2,$$
$$y = \pm 2; \quad \text{lub:} \quad y = \pm 3.$$

379. Rozwiązać równania:

$$x - y = 2; \quad x^5 - y^5 = 242.$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze, otrzymamy:

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = \frac{242}{2},$$

czyli: $$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = 121,$$

to jest:

$$x^4 + y^4 + xy(x^2 + y^2) + x^2y^2 = 121 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Lecz: $x - y = 2;$

przeto, podnosząc obie strony do kwadratu; mieć będziemy

$$x^2 - 2xy + y^2 = 4,$$

skąd: $x^2 + y^2 = 2xy + 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$

Podnosząc obie strony tego ostatniego równania do kwadratu, otrzymamy:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 4x^2y^2 + 16xy + 16,$$

przeto: $x^4 + y^4 = 2x^2y^2 + 16xy + 16 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$

Podstawiając wartości na $x^2 + y^2$ i $x^4 + y^4$, wzięte z równań (2) i (3), w równanie (1), mieć będziemy:

$$2x^2y^2 + 16xy + 16 + xy(2xy + 4) + x^2y^2 = 121,$$

skąd: $5x^2y^2 + 20xy = 105,$

czyli: $x^2y^2 + 4xy = 21.$

Z tego równania otrzymamy:

$$xy = 3, \quad \text{lub:} \quad xy = -7.$$

Weźmy $xy = 3$; z tego równania, połączonego z równaniem $x - y = 2$, znajdziemy $x = 3$, lub: $x = -1$, a następnie: $y = 1$, lub $y = -3$. Gdybyśmy wzięli: $xy = -7$, wtedy przekonalibyśmy, że wartości na x i y byłyby urojone.

PRZYKŁADY XXXV.

1. $x - y = 1; \quad x^2 - xy + y^2 = 21.$
2. $x + y = 7(x - y); \quad x^2 + y^2 = 100.$
3. $4x - 5y = 1; \quad 2x^2 - xy + 3y^2 + 3x - 4y = 47.$
4. $\frac{x}{12} + \frac{y}{10} = x - y; \quad \frac{7xy}{15} - \frac{2x}{3} - 2y = 0.$
5. $3x + 2y = 5xy; \quad 15x - 4y = 4xy.$
6. $xy = x + y; \quad ax = by.$

7. $x^2 + xy = 28; \quad xy - y^2 = 3.$
8. $x^2 + xy - 6y^2 = 21; \quad xy - 2y^2 = 4.$
9. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}; \quad x^2 + y^2 = 90.$
10. $x + y = 9; \quad x^3 + y^3 = 189.$
11. $x^2 + xy + y^2 = 37; \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481.$
12. $x^2 + y^2 = 34; \quad x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} = 20.$
13. $x^2yz = a; \quad xy^2z = b; \quad xyz^2 = c.$
14. $3yz + 2zx - 4xy = 16; \quad 2yz - 3zx + xy = 5;$
    $4yz - zx - 3xy = 12.$

XXXVI.

Zagadnienia prowadzące do równań stopnia drugiego zawierających więcej niż jednę niewiadomą.

380. Znaleść liczbę dwucyfrową, mającą następujące własności: 1-sze, suma kwadratów dwóch cyfr, z których składa się liczba, jest równą samej tej liczbie powiększonej o iloczyn tychże cyfr; 2-re jeżeli dodamy 36 do tej liczby, wtedy otrzymamy nową liczbę dwucyfrową, złożoną z tych samych cyfr, lecz napisanych w odwrotnym porządku.

Niech x oznacza cyfrę stojącą na miejscu dziesiątków, a y cyfrę, stojącą na miejscu jedności. Wtedy sama liczba wyrazi się tak: $10x + y$; jeżeli zaś cyfry odwrócimy, będzie liczba $10y + x$. Więc podług warunków zagadnienia, mieć będziemy równania:

$$x^2 + y^2 = xy + 10x + y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$10x + y + 36 = 10y + x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Z równania (2) mamy:

$$9y = 9x + 36,$$

przeto $y = x + 4.$

Podstawiając tę wartość w (1), otrzymamy:

$$x^2 + (x + 4)^2 = x(x + 4) + 10x + x + 4,$$

skąd: $x^2 - 7x + 12 = 0.$

Z tego równania znajdziemy:

$$x = 3, \quad \text{lub:} \quad x = 4;$$

a zatem: $y = 7$, lub: $y = 8.$

Szukana liczba musi więc być albo 37, albo też 48. Każda z tych liczb zadosyć czyni wszystkim warunkom zagadnienia.

381. Pewna osoba wychodzi z miejsca położonego u samego spodka góry, z zamiarem dojścia do szczytu. Drugą połowę odległości do szczytu przechodzi z prędkością o pół wiorsty mniejszą na godzinę, aniżeli pierwszą połowę tejże odległości, i dosięga szczytu w $5\frac{1}{2}$ godzin. Ze szczytu schodzi na dół w ciągu $3\frac{3}{4}$ godz., przyczem idzie z prędkością jednakową, i o jednę wiorstę na godzinę większą, aniżeli w pierwszej połowie wstępowania na górę. Znaleść: odległość od spodka góry do jej szczytu — i różne prędkości, z jakiemi ta osoba szła?

Niech $2x$ oznacza liczbę wiorst od spodka do wierzchołka, y zaś liczbę wiorst, jaką ta osoba przechodzi na godzinę, podczas pierwszej połowy wchodzenia na górę. Przeto pierwszą połowę drogi przebyła w godzin $\frac{x}{y}$, drugą zaś w godzin $\frac{x}{y - \frac{1}{2}}$. Z warunków zadania będzie:

$$\frac{x}{y} + \frac{x}{y - \frac{1}{2}} = 5\frac{1}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

i podobnież:

$$\frac{2x}{y + 1} = 3\frac{3}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Z równania (2) otrzymamy:

$$2x = \frac{15}{4}(y + 1);$$

przeto: $x = \frac{15}{8}(y + 1).$

Z równania (1) będzie:

$$x\left(2y - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}y\left(y - \frac{1}{2}\right);$$

skąd: $15(y + 1)(4y - 1) = 44y(2y - 1),$

czyli: $28y^2 - 89y + 15 = 0.$

Z tego równania otrzymujemy: $y = 3$, lub $y = \frac{5}{28}$. Wartość $\frac{5}{28}$ nie ma tutaj zastosowania, gdyż y podług warunków zadania jest większe od $\frac{1}{2}$. Zatem: $y = 3$, a następnie: $x = \frac{15}{2}$.

Odległość przeto od spodka góry do szczytu jest 15 wiorst.

382. Zakończmy ten rozdział rozwiązaniem zagadnienia następującego:

Znaleść dwie takie liczby, aby ich suma, iloczyn i różnica ich kwadratów były równe.

Oznaczmy większą z tych liczb głoską x, mniejszą zaś głoską y. Wtedy podług warunków zagadnienia powinno być:

$$x + y = xy = x^2 - y^2.$$

Aby rozwiązać te równania, wyprowadzamy najprzód z równania $x + y = xy$ wartość na x; będzie:

$$x = \frac{y}{y-1},$$

skąd: $$x + y = \frac{y}{y-1} + y = \frac{y^2}{y-1},$$

i: $$xy = \frac{y^2}{y-1}.$$

Ponieważ różnica kwadratów tych liczb ma być równą temuż samemu, czemu się równa suma i iloczyn, przeto będzie z jednej strony:

$$x^2 - y^2 = \frac{y^2}{y-1}.$$

Lecz ponieważ $x = \frac{y}{y-1}$, przeto $x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 2y + 1}$, zatem z drugiej strony otrzymamy:

$$x^2 - y^2 = \frac{y^2}{y^2 - 2y + 1} - y^2 = \frac{-y^4 + 2y^3}{y^2 - 2y + 1}.$$

Porównywając tę wartość na $x^2 - y^2$ z napisaną powyżej, otrzymamy:

$$\frac{y^2}{y-1} = \frac{-y^4 + 2y^3}{y^2 - 2y + 1}.$$

$y = 0$ czyni zadosyć temu równaniu i daje również $x = 0$; ażeby znaleść pierwiastki różne od zera, dzielimy równanie znalezione przez y^2 (co możemy zrobić, gdyż y już nie może być zerém); będzie:

$$\frac{1}{y-1} = \frac{-y^2 + 2y}{y^2 - 2y + 1},$$

znosząc mianownik:

$$y - 1 = -y^2 + 2y, \text{ czyli: } y^2 - y = 1.$$

Stąd otrzymamy na y takie wartości:

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

a ograniczając się na wartości dodatniej:

$$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Wartość zaś na x będzie na zasadzie równania:

$$x = \frac{y}{y-1},$$

taką: $$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}.$$

Aby mianownik w tem ostatniem wyrażeniu uczynić wymiernym, pomnóżmy licznik i mianownik przez $\sqrt{5} + 1$, otrzymamy ostatecznie:

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Większa zatem z szukanych liczb jest $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ mniejsza zaś $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Liczby te czynią zadosyć warunkom zagadnienia, gdyż:

$$x + y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5},$$

$$xy = 2 + \sqrt{5}.$$

$$x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}.$$

Rozwiązanie tegoż samego zagadnienia można uczynić prostszem, wychodząc z równania: $x + y = x^2 - y^2$, którego obie strony mogą być podzielone przez $x + y$. Wskazujemy tu tylko tę drogę, pozostawiając czytelnikowi rozwinięcie całego rozwiązania.

PRZYKŁADY XXXVI.

1. Iloczyn dwóch liczb jest równy 6 razy wziętej ich sumie, suma zaś ich kwadratów jest 325; znaleść te liczby.

2. Różnica dwóch liczb pomnożona przez różnicę ich kwadratów stanowi 32, suma zaś tychże liczb pomnożona przez sumę ich kwadratów wynosi 272; znaleść te liczby.

3. Różnica dwóch liczb jest 3, a różnica ich sześcianów jest 279; — znaleść te liczby.

4. Powierzchnia pewnego prostokąta wynosi 300 stóp kwadratowych; drugi prostokąt, którego powierzchnia jest także 300 stóp kwadratowych, jest o 8 stóp krótszy a o 10 stóp szerszy aniżeli pierwszy. Znaleść długość i szerokość każdego z tych prostokątów.

5. Dwa pociągi wyjeżdżają w jednej i tej samej chwili z dwóch miast i oba jadą ruchem jednostajnym naprzeciwko siebie. Gdy się spotkały, wtedy jeden z nich przejechał o 108 wiorst więcej, aniżeli drugi. Jeżeli dalej jechać będą z temiż samemi prędkościami, wtedy pierwszy przebędzie pozostałą część drogi w 9 godzin, a drugi w 16 godzin. Znaleść odległość pomiędzy temi dwoma miastami i prędkości z jakiemi pociągi jadą.

6. A i B są to dwa miasta odległe od siebie na 18 wiorst i leżące na tym samym brzegu rzeki. Podróżny udaje się z A do B i przebywa tę odległość w czterech godzinach, płynąc łódką pierwszą połowę drogi, a idąc pieszo drugą połowę. Z powrotem pierwszą połowę drogi idzie pieszo z taką samą prędkością jak przedtem, drugą zaś płynie łódką; lecz ponieważ teraz płynie z wodą, przeto przepływa o $1\frac{1}{2}$ wiorsty na godzinę więcej, aniżeli w przeciwną stronę i odbywa całą drogę w $3\frac{1}{2}$ godzinach. Znaleść z jakiemi prędkościami szedł i płynął.

7. Dwa naczynia sześcienne mają razem objętości 407 centymetrów sześciennych. Wysokość jednego z nich dodana do wysokości drugiego, daje na sumę 11 centymetrów. Znaleść objętość każdego z tych naczyń.

8. Na przestrzeni 1732,5 metra przednie koło powozu wyrobi o 165 obrotów więcej aniżeli tylne. Gdybyśmy powiększyli obwód każdego koła o 0,75 metra, wtedy na tej samej przestrzeni przednie koło zrobiłoby o 112 obrotów więcej aniżeli tylne. Znaleść długość obwodu każdego z kół.

9. Po obwodzie placu mającego kształt trójkąta prostokątnego biegną dwaj chłopcy. Wybiegli oni z wierzchołka kąta prostego *w przeciwnych kierunkach* wzdłuż boków trójkąta, i biegną z prędkościami, których stosunek równa się 13 : 11. Po raz pierwszy spotykają się w samym środku przeciwprostokątnej; po raz drugi zaś w odległości 20 metrów od wierzchołka kąta prostego, na jednej z przyprostokątnych. Znaleść podług tych danych długości trzech boków, ograniczających plac.

10. Bachus znalazł Sylena śpiącego przy dzbanie wina; skorzystał z tej okoliczności i pił wino przez dwie trzecie części tego czasu, przez który Sylen wypróżniłby cały dzban. Gdy Sylen obudził się, wypił resztę, którą zostawił Bachus. Gdyby obaj razem pili od początku, wtedy wypiliby o 2 godziny prędzej, ale Bachus wypiłby tylko połowę tego wina, które zostawił Sylenowi. W jakim czasie każdy z nich sam wypróżniłby dzban?

XXXVII.

Przedstawienia graficzne równań stopnia pierwszego.

383. W celu uwidocznienia wypadków działań arytmetycznych nad dwiema wielkościami użyliśmy sposobu (§ 156) polegającego na tem, że każdą parę liczb x, y, nad któremi mieliśmy wykonać działanie, przedstawiliśmy za pomocą pewnego punktu, leżącego na płaszczyznie rysunku w odległościach x i y od prostych OY i OX przecinających się pod kątem prostym, i przy tak znalezionym punkcie wypisywaliśmy wypadek działania z. Jeżeli dla x i y będziemy przyjmowali coraz to inne wartości, wtedy punkt odpowiedni będzie przyjmował coraz to inne położenie na płaszczyźnie. Wypadek działania z może przytem albo zmieniać się, albo też pozostawać bez zmiany.

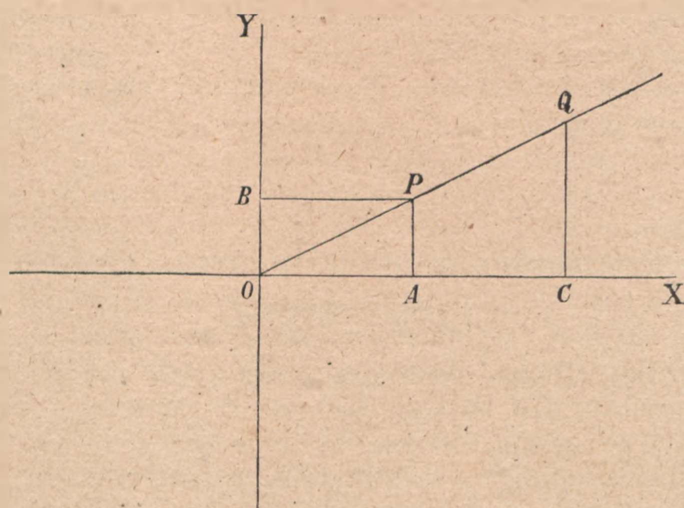
Zastanówmy się nad pytaniem, w jakich warunkach wypadek dzielenia:

$$z = \frac{y}{x}$$

pozostaje bez zmiany.

Rzut oka na tabliczkę dzielenia każe przypuszczać, że wszystkie punkty, dla których iloraz $y : x$ jest jeden i ten sam, leżą na pewnej linii prostej, przechodzącej przez punkt O. Dowiedziemy geometrycznie, że tak jest w istocie.

Dla łatwiejszego wyrażenia się wprowadzamy nazwy następujące. Proste OX i OY nazwiemy *osiami spółrzędnych*;



w szczególności OX *osią odciętych*, OY *osią rzędnych*. Odległość $BP = OA = x$ nazwiemy *odciętą* punktu P, zaś $AP =$

$= OB = y$ *rzędną* tegoż punktu; odciętą i rzędną nazywamy także *współrzędnemi* punktu P. Rzędna jest dodatnia, jeżeli punkt P leży nad osią odciętych; ujemna, jeżeli P leży pod osią. Odcięta jest dodatnia dla punktów leżących z prawej strony osi rzędnych, i ujemna dla punktów leżących z lewej strony.

Niech będą P i Q dwa punkty, dla których ilorazy $y : x$ mają jednę i tę samę wartość a $\left(\text{na rysunku przyjęto } a = \frac{1}{2}\right)$; będzie więc:

$$\frac{AP}{OA} = \frac{CQ}{OC} = a.$$

Połączywszy punkty P i Q z punktem O liniami prostemi otrzymamy dwa trójkąty prostokątne OAP i OCQ, które, jak to widać z powyższej proporcyi, są podobne; a więc:

$$\angle\, AOP = \angle\, COQ;$$

z czego wypada, że prosta OQ padnie na OP. To znaczy, że *wszystkie punkty, dla których stosunek rzędnej do odciętej jest jeden i ten sam, leżą na tej samej linii prostej przechodzącej przez O.*

I odwrotnie, przez podobne rozumowanie znaleźlibyśmy, że *dla wszystkich punktów leżących na prostej, przechodzącej przez O stosunek rzędnej do odciętej jest jeden i ten sam.*

Twierdzenie to możemy wyrazić jeszcze inaczej. Jeżeli $y : x = a$, to $y = ax$; a zatem *wszystkie punkty: których spółrzędne czynią zadość równaniu:*

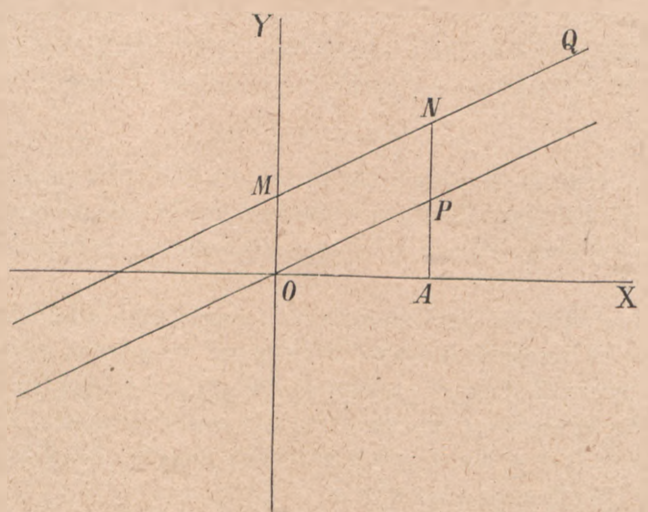
$$y = ax,$$

leżą na prostej; i odwrotnie: *spółrzędne wszystkich punktów prostej OP czynią zadość temu równaniu.* Dlatego też równanie to nazwiemy *równaniem prostej OP.*

Jeżeli punkt P przesuwać będziemy wzdłuż prostej OP od strony lewej ku prawej, to obie spółrzędne będą się zwiększały nieustannie; przy przesuwaniu punktu P w stronę przeciwną obie spółrzędne będą się stawały coraz mniejsze.

Nie uciekając się do pośrednictwa punktu P można powiedzieć, że jeżeli w równaniu $y = ax$ wielkość *zmienna* x wzrasta, to i zmienna y wzrasta; jeżeli x maleje, to i y maleje. Gdybyśmy jednak za a przyjęli jakąkolwiek liczbę ujemną, np. $-\frac{1}{2}$, to przekonalibyśmy się, że przy wzrastającem x, y maleje, przy malejącem x y wzrasta (por. tabliczkę dzielenia).

384. Poprowadźmy prostą MQ równoległą do OP, i przedłużmy AP do przecięcia N z prostą MQ. Z równole-



głoboku $OPNM$ widać, że $PN = OM$. Niech będzie $OM = b$, wtedy rzędna punktu N będzie większa o b, aniżeli rzędna punktu P. Będzie więc

$$y = ax + b$$

równaniem prostej MN. A ponieważ *każde równanie stopnia pierwszego z dwiema zmiennemi* można sprowadzić do po-

wyższej postaci, więc też każde takie równanie *można przedstawić za pomocą linii prostej.*

Niech będzie np. dane równanie:

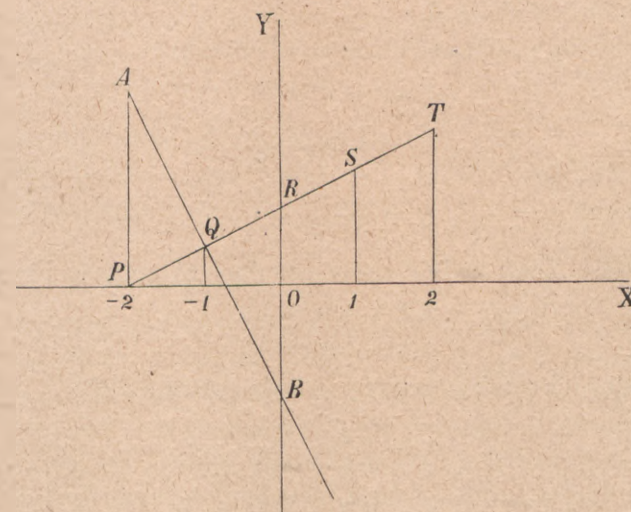
$$2y - x = 2;$$

przenosząc x na drugą stronę i dzieląc przez 2 dostaniemy:

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Podstawiając w tem równaniu zamiast x kolejno dowolnie obrane wielkości, otrzymamy odpowiednie wartości dla y:

$x =$	...	-2,	-1,	0,	1,	2, ...
$y =$	...	0,	$\frac{1}{2}$,	1,	$\frac{3}{2}$,	2, ...
Punkty:	...	P,	Q,	R,	S,	T, ...



Obierając dowolnie jednostkę długości, np. 1 cm., i przyjmując tak znalezione x, y za spółrzędne, dostaniemy szereg punktów $PQRST$... leżących na linii prostej.

Przypuśćmy, że jest dane jeszcze drugie równanie:

$$y = -2x - \frac{3}{2}.$$

Znajdziemy podobnie jak poprzednio:

$$x = \quad .\ .\ -2,\ -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2\ldots$$

$$y = \quad .\ .\ .\ \frac{5}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{7}{2},\ -\frac{11}{2}\ldots$$

Punkty: . . . . A, Q, . . B, ...

Proste PT i AB przecinają się w punkcie Q, którego odciętą jest -1, a rzędną $\frac{1}{2}$. Wartości te czynią zadość równaniom obu prostych; a zatem, *ażeby znaleść spółrzędne punktu przecięcia dwóch prostych, należy, uważając zmienne x, y za niewiadome, rozwiązać równania obu prostych względem tych niewiadomych.*

I rzeczywiście, rozwiązując równania:

$$2y - x = 2$$

$$y = -2x - \frac{3}{2},$$

dostaniemy $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$.

385. Niech będą dwie proste dane za pomocą równań:

$$a_1x + b_1y = k_1,$$
$$a_2x + b_2y = k_2;$$

spółrzędne ich punktu przecięcia będą (patrz § 220):

$$x = \frac{k_1b_2 - k_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1k_2 - a_2k_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Ułamki te będą pozbawione znaczenia jakiejkolwiek ze znanych nam liczb, jeżeli ich mianownik będzie zerem, to jest jeżeli:

$$a_1b_2 = a_2b_1,$$

skąd, dzieląc obie strony przez b_1b_2:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

W tym wypadku nie można znaleść punktu przecięcia danych prostych; ale też łatwo przekonać się, że proste, wyrażone przez takie równania, nie przecinają się wcale, czyli że są równoległe. W tym celu rozwiązujemy równania dane względem y:

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{k_1}{b_1}$$

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{k_2}{b_2}.$$

Ponieważ:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

więc obie proste są równoległe do prostej

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x,$$

a zatem są równoległe między sobą.

Gdyby oprócz mianowników i liczniki także były zerami, dostalibyśmy w podobny sposób:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Z jednego równania można więc otrzymać drugie, dzieląc je przez współczynnik liczebny równy powyższemu stosunkowi. W tym wypadku wszelkie wartości, czyniące zadość jednemu równaniu, zadawalniają także i drugie; oba równania przedstawiają więc jednę i tę samę linię prostą.

Przypuszczaliśmy dotąd, że żaden z współczynników nie jest zerem. Gdyby jednak np. współczynnik przy y był zerem, to otrzymalibyśmy równanie tej postaci:

$$ax = k,\ \text{czyli}\ x = \frac{k}{a},$$

wymagające, ażeby odcięte wszystkich punktów prostej miały jednę i tę samę wielkość. Własność tę ma prostopadła do osi OX poprowadzona na odległości $\frac{k}{a}$ od punktu O. Podobnie równanie:

$$by = k$$

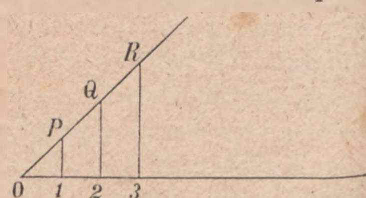
przedstawia prostą prostopadłą do OY, czyli równoległą do OX.

386. Na zasadzie tego, co było wyłożone w tym rozdziale, można każde dwa równania stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi rozwiązać sposobem graficznym: należy wyrysować proste, odpowiadające tym równaniom, znaleść ich punkt przecięcia i zmierzyć cyrklem spółrzędne tego punktu. Ale w wielu zadaniach można uniknąć układania równań i wogóle wszelkiego rachunku, a rozwiązywać je wyłącznie przy pomocy rysunku.

Rozwiążmy następujące zadanie:

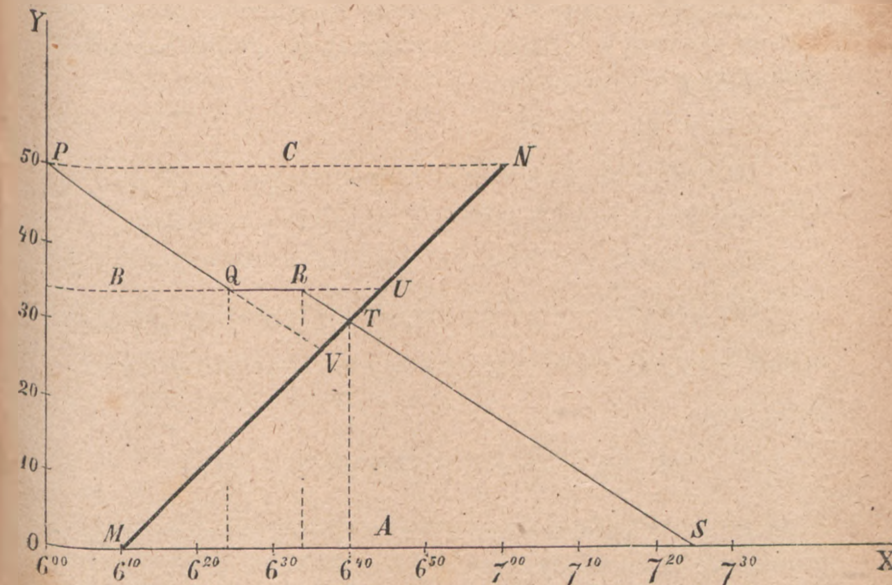
Pociąg pospieszny wychodzi ze stacyi A o godz. 6 m. 10 i przychodzi do stacyi C, nie zatrzymując się w drodze, o g. 7 m. 00. Pociąg osobowy wychodzi z C o g. 6 m. 00 i przychodzi do A o g. 7 m. 25, zatrzymawszy się na stacyi B od g. 6 m. 24 do g. 6 m. 34. Kiedy i na jakiej odległości od A pociągi się spotkają, jeżeli odległość B od A wynosi 34 wiorsty, a C od A 50 wiorst?

Ruch każdego pociągu uwidocznić trzeba w ten sposób, ażeby z figury można było odczytać, w jakiej odległości od stacyi początkowej A pociąg znajduje się w każdym dowolnie obranym czasie. W tym celu wypiszmy minuty wzdłuż osi odciętych w równych odległościach, a za rzędną w każdej chwili przyjmiemy odcinek proporcyonalny do odległości pociągu od stacyi A. Końce rzęd-



nych utworzą pewną linię, która będzie prostą, jeżeli ruch będzie jednostajny, gdyż w tym wypadku stosunki rzędnych do odciętych będą równe, — a mianowicie: równe prędkości pociągu; — trójkąty $OP1$, $OQ2$, $OR3$,... będą podobne, z czego wypada, że punkty PQR.. leżą na linii prostej. Dosyć jest więc wiedzieć, o której godzinie pociąg wyszedł z jednej stacyi i o której przyszedł na następną, ażeby móc tę linię wykreślić.

Na rysunku załączonym, przedstawiającym bieg pociągów, o których mowa w zadaniu, jednej minucie odpowiada



długość 1 mm. na osi OX, a jednej wiorscie długość 1 mm. na osi OY. Bieg pociągu pospiesznego idącego z A do C jest przedstawiony za pomocą linii MN; pociąg osobowy, idący w przeciwnym kierunku, daje linię łamaną $PQRS$; odcinek

QR równoległy do OX odpowiada dziesięciominutowemu postojowi tego pociągu na stacyi B. Punkt przecięcia T linii MN i $PQRS$ odpowiada tej chwili, w której odległości obu pociągów od A są równe, t. j. kiedy one się spotkają. Wystarcza więc zmierzyć obie spółrzędne punktu T, ażeby znaleść czas i miejsce spotkania. Czyniąc to, znajdziemy, że spotkanie nastąpiło o godz. 6 min. 40 na odległości 30 wiorst od stacyi A.

387. Rozwiążemy toż samo zadanie za pomocą rachunku.

Pociąg pospieszny przebywa 50 wiorst w 50 minut, prędkość jego wynosi więc 1 wiorstę na minutę. A ponieważ on wyrusza o 6^{10}, zatem w x minut po godz. 6-ej odległość jego y od A będzie:

$$y = x - 10 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Równanie to przedstawia bieg pociągu od 6^{10} do 7^{00}, a zatem jest prawdziwe, jeżeli:

$$10 < x < 60 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^a)$$

Dla pociągu osobowego znajdziemy w podobny sposób, że prędkość jego na odstępie CB wynosi $\frac{2}{3}$ wiorsty na minutę, skąd:

$$50 - y = \frac{2}{3} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

a ponieważ ruch ten trwa od 6^{00} do 6^{24}, więc równanie to jest prawdziwe tylko wtedy, jeżeli:

$$0 < x < 24 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^a)$$

W czasie postoju na stacyi B będzie:

$$y = 34 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

i:
$$24 < x < 34 \quad . \quad . \quad . \quad (3^a)$$

i wreszcie na odstępie BA:

$$y = \frac{2}{3}(85 - x) \quad . \quad . \quad (4)$$

$$34 < x < 85 \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

Ponieważ nie wiemy z góry, na którym odstępie nastąpi spotkanie, musimy więc kolejno kombinować równanie (1) z równaniami (2), (3) i (4), przyczem takie tylko pierwiastki będą stanowiły rozwiązanie zadania, które czynią zadość odpowiedniej nierówności (2^a), (3^a) albo (4^a) i nierówności (1^a).

Z równań (1) i (2) otrzymamy $x = 36$, które nie zadawalnia nierówności (2^a), z czego widać, że pociągi nie mogą się spotkać na odstępie CB ($x = 36$ jest odciętą punktu V, w którym spotykają się proste PQ i MN).

Podobnie z równań (1) i (3) znajdziemy $x = 44$, niezgodne z nierównością (3^a); a zatem pociągi nie spotkają się na stacyi B (rozwiązanie tych równań daje punkt przecięcia U prostych QR i MN).

Wreszcie z równań (1) i (4) otrzymamy $x = 40$, co czyni zadość zarówno nierówności (4^a) jak (1^a); a zatem pociągi spotkają się na odstępie BA o godz. 6^{40}; odległość punktu spotkania od A znajdziemy z równania (1) równą 30, jak to już znaleźliśmy sposobem graficznym, który prościej i prędzej doprowadził nas do celu.

PRZYKŁADY XXXVII.

1. Przedstawić graficznie, przyjmując 1 cm. za jedność, przebieg zmiennej y, jeżeli

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x,$$

a x zmienia się od -2 do $+2$.

2. Jaka jest forma ogólna równań prostych, wykreślonych na tabliczkach dodawania i odejmowania, jeżeli odstępy między liczbami są na obu osiach jednakowe?

3. Znaleść punkt przecięcia prostych, których równania są:

$$x - 3y = 7,$$
$$3x - y = 1.$$

4. Znaleść graficznie, o jakich godzinach i minutach jedna skazówka zegarka zakrywa drugą. Na rysunku niech jednej godzinie odpowiada długość 18 mm. na osi OX, i jednej podziałce minutowej długość 1 mm. na osi OY.

5. O jakich godzinach i minutach jedna skazówka zegarka stanowi przedłużenie drugiej?

6. Gdzie leżą wszystkie punkty, dla których

$$1 < x < 3,$$
$$y < 0\,?$$

7. Gdzie leżą wszystkie punkty, dla których

$$-6 < x < 0$$
$$0 < y < 1 - \frac{1}{2}x\,?$$

8. Przedstawić graficznie bieg pociągów, podług załączonego rozkładu, oraz oznaczyć czas i miejsce ich spotkania?

Przych.	Odch.	Wiorsty	Stacye	Przych.	Odch.
8^{40}	—	00	Warszawa	—	7^{45}
8^{17}	8^{19}	15	Pruszków	—	—
7^{57}	8^{00}	28	Grodzisk	—	—
7^{36}	7^{40}	41	Ruda Guzowska	8^{33}	8^{34}
7^{20}	7^{21}	52	Radziwiłłów	—	—
	7^{06}	62	Skierniewice	9^{00}	

XXXVIII.

Przedstawienia graficzne równań stopnia drugiego.

388. Widzieliśmy, że jeżeli nad dwiema wielkościami x i y wykonamy dodawanie, odejmowanie lub dzielenie, i jeżeli będziemy zmieniali x i y w ten sposób, żeby wypadek działania pozostał bez zmiany, to wszystkie punkty, dla których x i y będą spółrzędnemi, znajdą się na linii prostej. Zastanówmy się teraz, jakie jest położenie wzajemne wszystkich punktów, dla których *iloczyn* spółrzędnych będzie jeden i ten sam, t. j. dla których

$$x\,y = k,$$

gdzie k jest liczbą stałą.

Jest to równanie stopnia drugiego, gdyż takim jest stopień wyrażenia, będącego na pierwszej stronie równania.

Przypuśćmy naprzód, że $k{=}1$, to jest szukamy takich punktów, dla których

$$x\,y = 1.$$

Rozwiązując to równanie względem y znajdziemy, w jaki sposób y zależy od x:

$$y = \frac{1}{x}.$$

Zauważmy, że y ma zawsze ten sam znak, co x, i że wartość bezwzględna y jest tem większa, im mniejszą jest wartość bezwzględna x, i odwrotnie.

Obierzmy dowolnie jednostkę długości i odetnijmy na osi OX:

$$OE = \tfrac{1}{4}, \quad OD = \tfrac{1}{2}, \quad OA = 1, \quad OB = 2, \quad OC = 4$$
$$OE^1 = -\tfrac{1}{4}, \; OD^1 = -\tfrac{1}{2}, \; OA^1 = -1, \; OB^1 = -2, \; OC^1 = -4$$

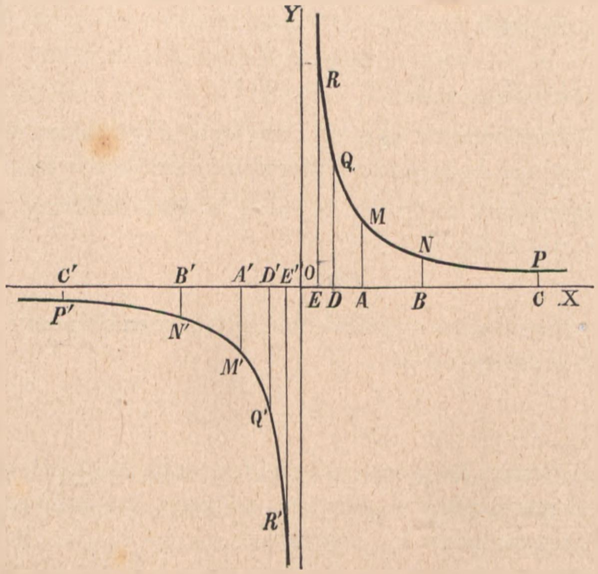
Odpowiednie rzędne będą:

$$ER = 4, \quad DQ = 2, \quad AM = 1, \quad BN = \tfrac{1}{2}, \quad CP = \tfrac{1}{4}$$
$$E^1R^1 = -4, \; D^1Q^1 = -2, \; A^1M^1 = -1, \; B^1N^1 = -\tfrac{1}{2}, \; C^1P^1 = -\tfrac{1}{4}$$

Poprowadźmy linie $RQNMP$ i $R^1Q^1N^1M^1P^1$; spółrzędne punktów obu tych gałęzi czynią zadość równaniu

$$xy = 1,$$

dlatego też uważamy je za *jednę linię krzywą;* krzywa ta otrzymała nazwę *hiperboli* [1]). Ponieważ obie spółrzędne każdego punktu tej hiperboli mają znaki jednakowe, więc hiperbola leży całkowicie w dwóch ćwiartkach przeciwległych płaszczyzny i nie może przecinać osi spółrzędnych.



Hiperbolę można przedłużyć w czterech kierunkach zawsze tak daleko jak na to pozwalają rozmiary rysunku, przytem przedłużenia te zbliżają się ciągle do osi. Przypuśćmy, że za jednostkę przyjęliśmy 1 cm, a grubość linii wyrysowanej jest $\frac{1}{2}$ mm. czyli $\frac{1}{20}$ cm., wtedy dla $x = 20$ dostaniemy $y = \frac{1}{20}$, a zatem punkt odpowiedni będzie oddalony od osi tylko o szerokość paska, przedstawiającego linię. Dla większych odciętych rzędne będą jeszcze mniejsze, a zatem, po-

[1]) Linia krzywa, o której mowa w tekscie, nie jest jedynym przypadkiem hiperboli.

cząwszy od tego punktu, hiperboli nie można odróżnić od osi odciętych. Podobnie te części hiperboli, na których leżą punkty mające $x < -20$, $y > 20$ lub $y < -20$ nie dadzą się odróżnić od osi spółrzędnych.

I wogóle, jeżeli grubość linii wyrysowanej wynosi $\frac{1}{n}$ długości przyjętej za jednostkę, wtedy począwszy od czterech punktów leżących na odległościach n jednostek od O, linia będzie się zlewała z osiami spółrzędnych; punkty te leżą tem dalej od O, im cieńszą linię rysujemy. Na linii matematycznej, której grubość jest o, niema takiego punktu, któryby leżał na osi, ale zawsze można znaleść taki punkt na osi, którego odległość od hiperboli jest mniejsza, aniżeli dowolnie obrany, choćby jaknajmniejszy odcinek d: w tym celu należy tylko odciąć na osi odległość $> \frac{1}{d}$. W skróceniu wyrażamy to w ten sposób: *osi spółrzędnych są styczne do hiperboli w nieskończoności.*

Zamiast wyrazu *nieskończoność* używamy w algebrze znaku ∞.

Wracając do równania

$$y = \frac{1}{x},$$

możemy powiedzieć, że jeżeli x jest dodatnie i zbliża się do 0, to y zbliża się do *nieskończoności ze strony dodatniej*, czyli $+\infty$; jeżeli x jest ujemne i zbliża się do o, wtedy y zbliża się do *nieskończoności ze strony ujemnej*, czyli $-\infty$. Odwrotnie, jeżeli x zbliża się do $+\infty$ lub $-\infty$, wtedy y zbliża się do 0 ze strony dodatniej lub ujemnej.

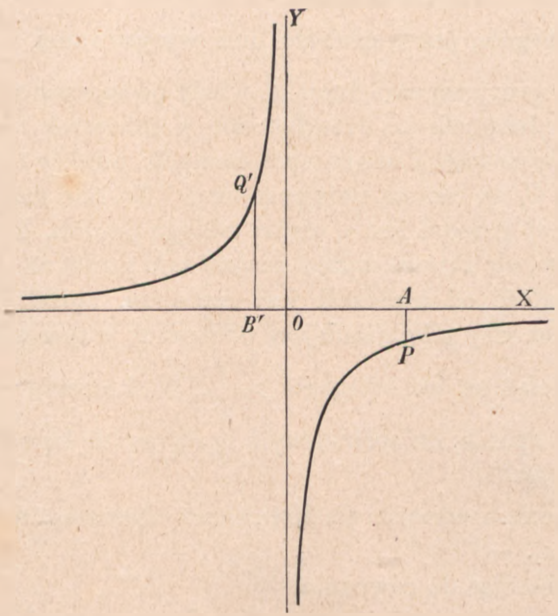
389. Przypuśćmy teraz, że w równaniu:

$$xy = k$$

$k = -1$, czyli:

$$y = -\frac{1}{x}.$$

W tym wypadku znak y będzie zawsze przeciwny znakowi x, a zatem linia przedstawiona przez powyższe równanie będzie leżała całkowicie w dwóch pozostałych ćwiartkach



płaszczyzny, kształt jej jednak nie różni się od poprzednio rozpatrywanej. Obracając płaszczyznę dokoła osi OX lub OY, można jedną hiperbolę położyć na drugą.

Niech będzie teraz k równe jakiejkolwiek liczbie dodatniej a^2, gdzie $a = +\sqrt{k}$; będzie:

$$y = \frac{a^2}{x},$$

co można w teu sposób napisać:

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{\frac{x}{a}}.$$

Jeżeli jednostkę długości przyjmiemy a razy mniejszą aniżeli w § 388, to otrzymamy tę samę hiperbolę, którą tam rozpatrywaliśmy. Niech będzie np. $a = 10$;

$$\frac{1}{10}y = \frac{1}{\frac{1}{10}x}$$

przy jednostce długości $= 1$ mm. jest równaniem tej samej krzywej, co i równanie:

$$y = \frac{1}{x}$$

przy jednostce $= 1$ cm. Dla $x = 5$ mm. czyli 0,5 cm., dostaniemy w pierwszym przypadku $y = 20$ mm., w drugim $y = 2$ cm., czyli jedno i to samo.

Gdyby k było ujemne, a więc $-k$ dodatnie, kładąc $k = -a^2$, gdzie $a = +\sqrt{-k}$, dostaniemy:

$$\frac{y}{a} = \frac{-1}{\frac{x}{a}}.$$

Równanie to przedstawia tę samę krzywą, co i równanie

$$y = -\frac{1}{x}$$

przy odpowiednio dobranej jednostce długości.

390. Jak wiemy, dwie linie proste równoległe nie przecinają się, jakkolwiek dalekobyśmy je wydłużyli; pomimo to mówimy, że *dwie proste równoległe przecinają się w nieskończoności.* Zdaniem tym wypowiadamy w skróceniu fakt następujący.

Niech będzie odcinek PQ równoległy do prostej AB. Poprowadźmy PO i QR prostopadle do AB, oraz przez punkt P linię prostą, której przecięcia z QR i AB oznaczymy przez S i T. *Jeżeli prostą* PT *będziemy obracali dokoła punktu* P *w ten sposób, żeby punkt* S *zbliżał się nieograniczenie do* Q, *wtedy punkt* T *będzie się oddalał do nieskończoności.*

W rzeczy samej, z trójkątów podobnych PQS i TOP wypada:

$$OT : OP = PQ : QS,$$

czyli:

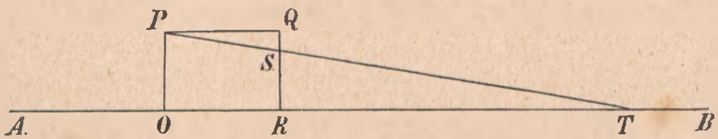
$$OT \,.\, QS = OP \,.\, PQ;$$

czyniąc zaś $OT = x$, $QS = y$, $OP \,.\, PQ = k^2$, znajdziemy:

$$xy = k^2.$$

Jeżeli więc x zbliżać się będzie do O, y będzie się zbliżać do ∞.

Gdyby punkt S zbliżał się do Q z przeciwnej strony, wtedy punkt T oddalałby się również w przeciwną stronę prostej AB do nieskończoności.



Zauważyć jeszcze można, że jeżeli grubość linii na rysunku wynosi $x = \frac{1}{n}$ jednostek długości, i mierzymy z dokładnością do $\frac{1}{n}$, wtedy odcinka PQ nie można odróżnić od tych wszystkich odcinków PS, których przedłużenia przecinają prostą AB w odległości od O większych od $\frac{k^2}{x} = \frac{k^2}{\frac{1}{n}} = nk^2$ (z obu stron punktu O), gdzie k^2 jest liczbą jednostek powierzchni w prostokącie $OPQR$.

391. Niech będzie dane jakiekolwiek równanie stopnia drugiego, np.:

$$-x^2 + 2x + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

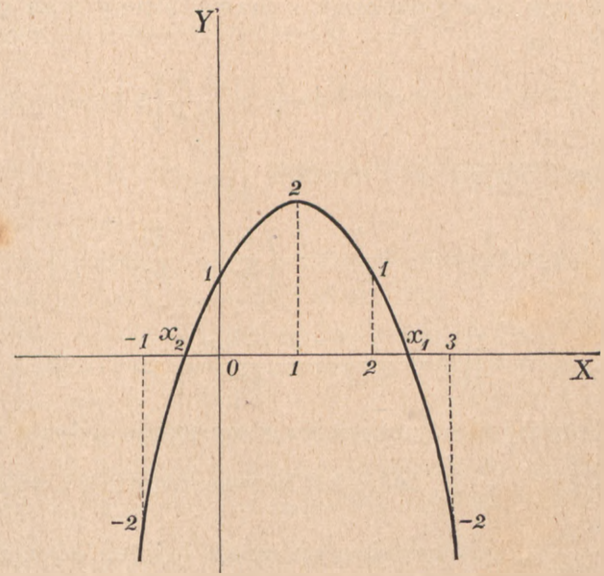
Rozpatrujmy naprzód trójmian, znajdujący się z lewej strony, i oznaczmy go przez y:

$$y = -x^2 + 2x + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ażeby poznać, jak zmienia się y, w zależności od x, obliczmy y dla kilku różnych wartości x, np.:

$$x = \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3;$$
$$y = \quad -2, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad -2.$$

Przyjmując x i y za spółrzędne, otrzymamy szereg punktów, które połączone dają pewną linię krzywą, zwaną *parabolą;* równanie (2) jest równaniem tej paraboli.



Widzimy, że wykreślona krzywa przecina w dwóch punktach oś odciętych; są to punkty, dla których $y = o$; odpowiednie odcięte dostaniemy więc, rozwiązując równanie (1):

$$x = 1 \pm \sqrt{2},$$

czyli:
$$x_1 = 1 + \sqrt{2}; \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Wyciągając pierwiastek z 2 z dokładnością do 0,1 dostaniemy:

$$x_1 = 1 + 1{,}4 = 2{,}4;$$

$$x_2 = 1 - 1{,}4 = -0{,}4;$$

co sprawdzić można na rysunku.

392. Niech będzie dany *trójmian stopnia drugiego*, który oznaczymy przez y:

$$y = ax^2 + bx + c; \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

rozpatrzymy, w jaki sposób zmienia się y w zależności od x.

W tym celu wyłączamy z prawej strony a za nawias; będzie:

$$y = a\left[x^2 + \frac{a}{b}x + \frac{c}{a}\right],$$

a dodając i odejmując w nawiasie $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$y = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],$$

czyli:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \quad . \quad . \quad (2)$$

Z prawej strony równania x występuje jedynie w wyrażeniu $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, które jest zawsze dodatnie, z wyjątkiem $x = -\frac{b}{2a}$, kiedy ono się staje zerem. Jeżeli $a > o$, iloczyn $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ jest więc zawsze dodatnim albo zerem; jest on ujemnym albo zerem, jeżeli $a < o$. Wypada stąd, że, jeżeli $a > o$, y przyjmuje *wartość możliwie najmniejszą*, czyli *minimum*, przy $x = -\frac{b}{2a}$; jeżeli zaś $a < o$, wtedy y przyjmuje *wartość możliwie największą*, czyli *maximum*, również przy $x = -\frac{b}{2a}$.

Wyrażenie $x + \frac{b}{2a}$ wzrasta razem z x; jeżeli ono jest dodatnie, wtedy $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ wzrasta również razem z x; jeżeli jednak $x + \frac{b}{2a} < o$, wtedy wartość jego bezwzględna (§ 233) zmniejsza się, gdy wartość względna wzrasta; $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ zmniejsza się więc przy rosnącym x, jeżeli $x + \frac{b}{2a} < o$.

Iloczyn $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ zmienia się w ten sam lub odwrotny sposób, co $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, stosownie do tego, czy a jest dodatnie czy ujemne.

Tablicę zmian, jakim wartość trójmianu podlega w różnych przypadkach, podajemy na str. 332.

393. Nieraz pożytecznie jest wiedzieć, bez wykonywania rachunku, jaki znak ma trójmian stopnia drugiego przy danej wartości x. Jeżeli $b^2 - ac < o$ (pierwiastki urojone), wtedy we wzorze (2) § 392 wyrażenie zawarte w nawiasie jest dodatnie dla każdego x, a zatem trójmian ma ten sam znak, co i współczynnik a. Toż samo ma miejsce i wtedy, jeżeli $b^2 = 4ac$ (pierwiastki równe), z wyjątkiem $x = -\frac{b}{2a}$, kiedy wartość trójmianu jest zero.

Przypuśćmy teraz, że $b^2 - 4ac > o$; w tym razie trójmian, przyrównany do zera, daje dwa pierwiastki rzeczywiste różne. Oznaczmy przez x_1 pierwiastek mniejszy, przez x_2 większy, i rozłóżmy trójmian na czynniki stopnia pierwszego (§ 345):

x	$-\infty \qquad -\frac{b}{2a} \qquad +\infty$
$x + \frac{b}{2a}$	$-\infty$; ujemne rosnące; 0; dodatnie rosnące; $+\infty$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$; dodatnie malejące; 0 *minimum*; dodatnie rosnące; $+\infty$
$a > 0$ $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$; dodatnie malejące; 0 *minimum*; dodatnie rosnące; $+\infty$
$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$	$+\infty$; malejące; $\frac{4ac - b^2}{4a}$ *minimum*; rosnące; $+\infty$
$a < 0$ $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$-\infty$; ujemne rosnące; 0 *maximum*; ujemne malejące; $-\infty$
$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$	$-\infty$; rosnące; $\frac{4ac - b^2}{4a}$ *maximum*; malejące; $+\infty$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Rozpatrywać będziemy osobno przypadki, w których x jest mniejsze od x_1, zawarte między x_1 i x_2 i większe od x_2.

1^0. Jeżeli:

$$x < x_1,$$

to tem bardziej:

$$x < x_2,$$

oba czynniki $x - x_1$ i $x - x_2$ są ujemne, ich iloczyn dodatni, a zatem trójmian ma ten sam znak, co a.

2^0. Jeżeli:

$$x_1 < x < x_2,$$

wtedy $x - x_1$ jest dodatnie, $x - x_2$ ujemne, ich iloczyn ujemny, a zatem trójmian ma znak przeciwny znakowi a.

3^0. Jeżeli:

$$x > x_2,$$

wtedy oba czynniki $x - x_2$ są dodatnie, ich iloczyn również dodatni, a zatem trójmian ma znak ten sam co a.

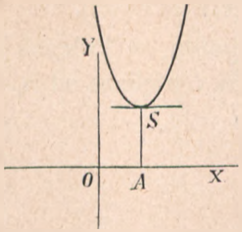
Wypada stąd następujące twierdzenie:

Trójmian stopnia drugiego ma ten sam znak, co współczynnik drugiej potęgi zmiennej, z wyjątkiem tego przypadku, w którym trójmian, przyrównany do zera, daje dwa pierwiastki rzeczywiste różne, a wartość, jaką nadajemy zmiennej, jest zawarta między tymi pierwiastkami.

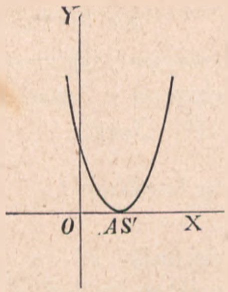
Zmienność trójmianu jest przedstawiona graficznie na str. 334. Odcięta OA jest tutaj równa $-\frac{b}{2a}$; przy tej wartości dla x trójmian przyjmuje wartość najmniejszą lub największą. Odpowiednia rzędna AS jest równa $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

PRZYKŁADY XXXVIII.

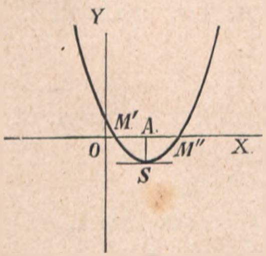
1. Wykreślić parabolę $y = \frac{1}{2}x^2$, przyjmując za jednostkę długości 1 cm.



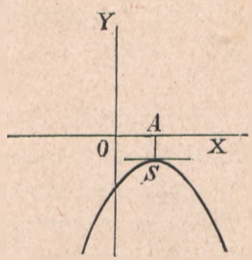
$a>0$; $4ac - b^2 > 0$
$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$; minimum dodatnie, pierwiastki urojone.



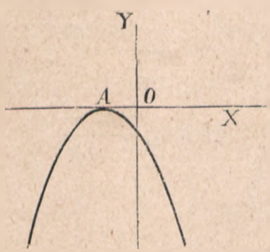
$a>0$ $4ac - b^2 = 0$
minimum zero, pierwiastki równe.



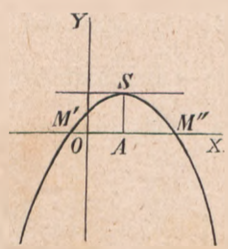
$a>0$ $4ac - b^2 < 0$
$\frac{4ac - b^2}{4a}$ minimum ujemne, 2 pierwiastki OM' i OM''.



$a<0$ $4ac - b^2 > 0$
$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$; maximum ujemne, pierwiastki urojone.



$a < 0$; $4ac - b^2 = 0$
maximum zero, pierwiastki równe.



$a<0$: $4ac - b^2 < 0$
$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$; maximum dodatnie, 2 pierwiastki OM' i OM''.

2. Wykreślić tę samą parabolę przy jednostce długości = 1 mm.

3. Wykreślić krzywą $x = \frac{1}{2}y^2$, biorąc za jednostkę długości 1 cm.

4. Wykreślić parabolę $y = 40000x^2$, biorąc za jednostkę długości 1 metr.

5. Wykreślić parabolę $y = -0{,}004x$, biorąc za jednostkę długości 0,1 mm.

6. Wykreślić hiperbolę $xy = -2$ oraz prostą $x + 2y = -1$, biorąc 1 cm. za jednostkę długości. Obliczyć i zmierzyć spółrzędne punktów przecięcia.

7. Toż samo dla paraboli $y = \frac{1}{5}x^2$ i prostej $y = 2x + 10$ przy jednostce długości równej 1 mm.

8. Znaleść graficznie i za pomocą rachunku pierwiastki równania:

$$y = 2x^2 - 5x + 3.$$

9. Obrawszy dogodne osi spółrzędnych, znaleść równania krzywych, wykreślonych na tabliczce mnożenia Pouchet'a.

XXXIX.

Ułamki ciągłe.

394. Pod nazwiskiem: *ułamek ciągły* rozumiemy wyrażenie tej postaci:

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \dots}}}$$

Lecz ponieważ w zastosowaniach ważnymi są jedynie takie ułamki ciągłe, w których liczniki b_2, b_3, $b_4 \dots$ są wszystkie równe 1, przeto w dalszym ciągu wykładu tylko tego rodzaju ułamki ciągłe rozważać będziemy. Tym sposobem nazwą: *ułamek ciągły* oznaczać będziemy wyrażenie:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}$$

Słowami opisać możemy tego rodzaju wyrażenie w ten sposób:

Ułamek ciągły jest to wyrażenie, składające się z całkowitej z ułamkiem, którego licznikiem jest jedność, a mianownikiem znowuż całkowita z ułamkiem, którego licznikiem jest jedność, a mianownikiem całkowita z takimże ułamkiem i t. d.

Pierwsza całkowita a_1 może być równą 0.

395. Każdy ułamek zwyczajny, którego licznik i mianownik są pierwszemi względem siebie, może być zamieniony na ułamek ciągły. Objaśnimy to na następującym przykładzie: Weźmy ułamek $\frac{1103}{887}$.

Odłączając z niego całkowitą, otrzymamy:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \frac{216}{887}.$$

Wartość ułamka wchodzącego do drugiej strony powyższej równości nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik jego podzielimy przez 216; czyniąc to będzie:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{887}{216}\right)},$$

czyli, odłączając znowuż całkowitą z ułamka niewłaściwego $\frac{887}{216}$:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{23}{216}}.$$

Wartość ostatniego ułamka w powyższem wyrażeniu nie zmieni się, gdy licznik i mianownik tego ułamka podzielimy przez 23; wykonywając to, otrzymamy:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\left(\frac{216}{23}\right)}}$$

czyli, po wyłączeniu całkowitej z ułamka niewłaściwego $\frac{216}{23}$:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{9}{23}}}.$$

Dzieląc znowuż licznik i mianownik ostatniego ułamka przez licznik 9, i postępując ciągle jednakowo podług powyższych wskazówek, otrzymamy szereg następujących równości, z których ostatnia rozwiązuje nam w zupełności zadanie:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{\left(\frac{23}{9}\right)}}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{9}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\left(\frac{9}{5}\right)}}}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{5}}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)}}}}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}$$

Ostatecznie więc:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}},$$

skąd widzimy, że ułamek zwyczajny $\frac{1103}{887}$ został przedstawiony pod postacią wyrażenia, które nazwaliśmy *ułamkiem ciągłym*. Oczywiście tenże sam sposób może być zastosowany do każdego ułamka zwyczajnego.

Gdy ułamek zwyczajny zamieniamy na ułamek ciągły, wtedy często mówimy, że *ułamek zwyczajny rozwijamy na ułamek ciągły*.

Rozpatrując bacznie całe działanie, które posłużyło nam do rozwinięcia ułamka $\frac{1103}{887}$ na ułamek ciągły, spostrzeżemy, ża działanie to jest zupełnie takie samo, jak działanie, za pomocą którego znaleźlibyśmy największy wspólny dzielnik dla liczb 1103 i 887. W samej rzeczy: rozkładając w zwykły sposób wspomniane działanie, otrzymamy:

	1	4	9	2	1	1	4
1103	887	216	23	9	5	4	1
887	864	207	18	5	4	4	
216	23	9	5	4	1	0	

Ilorazy 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4 przedstawiają nam mianowniki ułamków *cząstkowych* czyli *ogniw* w ułamku ciągłym.

Gdybyśmy chcieli rozwinąć na ułamek ciągły ułamek dziesiętny lub peryodyczny, wtedy należałoby najprzód każdy z tych ostatnich zamienić na ułamek zwyczajny, skrócić go, i potem postąpić jak pokazano wyżej.

396. Z ilości ułamkowych lub niewymiernych można otrzymywać ułamki ciągłe w sposób następujący: przypuśćmy, że chcemy oznaczyć wartość pewnej ilości x, która nie może być wyrażoną za pomocą liczby całkowitej. Wtedy najprostszy sposób dojścia do celu będzie następujący: wynajdźmy najprzód taką liczbę całkowitą a_1, którąby najbardziej zbliżała się swoją wartością do x, będąc wszakże od niego mniejszą. Wówczas $x - a_1$ będzie równe ułamkowi mniejszemu od jedności, a zatem $\frac{1}{x - a_1}$ będzie większe od jedności. Przypuśćmy, że $\frac{1}{x - a_1} = x_1$; ponieważ x_1 jest większe od jedności, przeto możemy znaleść nową liczbę całkowitą a_2, jak można najbardziej zbliżoną do x_1, i mniejszą od x_1. Wtedy znowuż $x_1 - a_2 < 1$, a zatem $\frac{1}{x_1 - a_2} > 1$. Oznaczmy $\frac{1}{x_1 - a_2}$ przez x_2; wówczas w dalszym ciągu znajdziemy nową liczbę całkowitą a_2, zbliżającą się najbardziej do x_2 i mniejszą od niego. Tym sposobem będzie: $x_2 - a_2 < 1$, więc: $\frac{1}{x_2 - a_2}$ będzie od jedności większe. Oznaczywszy tę ostatnią ilość przez x_3, wynajdziemy następnie nową liczbę całkowitą a_4, najbardziej zbliżoną do x_3 i dalej tak samo postępować będziemy. Z tego widoczną jest rzeczą, że tak postępując powoli wyczerpiemy ilość x i to w sposób najprostszy i zarazem najprędszy, gdyż używamy tu ciągle tylko liczb całkowitych, z których każda zbliża się jak można najbardziej do ilości szukanej.

Ponieważ:

$$\frac{1}{x - a_1} = x_1 ,$$

przeto: $x - a_1 = \dfrac{1}{x_1}$, a stąd:

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1} .$$

I podobnie: ponieważ:

$$\frac{1}{x_1 - a_2} = x_2 , \text{ przeto:}$$

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2} ;$$

dalej skoro:

$$\frac{1}{x_2 - a_3} = x_3 , \text{ więc:}$$

$$x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3} ;$$

również:

$$x_3 = a_4 + \frac{1}{x_4}$$

i tak dalej. Podstawiając teraz kolejno znalezione wartości, otrzymamy:

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_2}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_3}}} =$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{x_4}}}} ,$$

czyli ostatecznie:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}$$

Ułamki $\dfrac{1}{a_2}$, $\dfrac{1}{a_3}$, $\dfrac{1}{a_2}$ . . . nazywają się *ułamkami cząstkowymi* lub *ogniwami* ułamka ciągłego, ich mianowniki a_2 , a_3 , a_4 . . . . *mianownikami cząstkowymi* lub *mianownikami ogniw.*

Ze sposobu otrzymania wartości a_1 , a_2 , a_3 . . . . wypada, że wszystkie one są dodatnie; i takie tylko ułamki ciągłe w następstwie rozpatrywać będziemy. Należy tu jednak nadmienić, że mogą być ułamki ciągłe, w których ułamki cząstkowe nie wszystkie są dodatnie. Rozważanie wszakże takich ułamków ciągłych nie należy do zakresu niniejszego rozdziału, tembardziej, że tylko takie ułamki ciągłe, jakie bierzemy pod uwagę, mają praktyczne znaczenie.

397. Liczba tych działań, które prowadzą do oznaczenia ilości a_1 , a_2 , a_3 , . . . może być ograniczoną lub nieograniczoną. Przypadek pierwszy mieć będzie miejsce wtedy, gdy jedna z liczb, x_1 , x_2 , x_3 . . . . wypadnie wprost równą całkowitej. Całe działanie oczywiście na niej zostanie zakończone. Ułamek ciągły otrzymany wtedy składać się będzie z ograniczonej liczby ogniw i nazywa się ułamkiem ciągłym *skończonym.* W przeciwnym razie, gdy żadna z liczb x_1 , x_2 , x_3 . . . . nie będzie całkowitą, ułamek ciągły będzie *nieskończonym.*

398. Przykład rozwinięcia pierwszego rodzaju, to jest na ułamek ciągły skończony, mieliśmy w § 395. I w ogólności nie trudno dowieść, że ułamek zwyczajny może być zawsze rozwinięty na ułamek ciągły skończony. W rzeczy samej: przypuśćmy, że dany ułamek zwyczajny jest $\dfrac{A}{B}$. Jest to więc ta wartość, którą w § 396 oznaczyliśmy przez x. Oczywistą jest rzeczą, że liczbą całkowitą, najwięcej zbliżoną do wartości tego ułamka, będzie iloraz powstały z podzielenia A przez B; oznaczmy go przez a_1, resztę zaś pozostałą z tego dzielenia przez r_1. Wtedy będzie: $\frac{A}{B} - a_1 = \frac{r_1}{B}$. Ilość ta, którą w § 396 oznaczyliśmy przez x_1, będzie tutaj: $\frac{B}{r_1}$, i ponieważ r_1 jest resztą z takiego dzielenia, w którem dzielnikiem było B, przeto $r_1 < B$. Wartość całkowita, najbardziej zbliżona do x_1 otrzyma się znowuż przez dzielenie B przez r_1; oznaczmy iloraz z tego dzielenia przez a_2, a resztę pozostałą przez r_2. Wtedy: $\frac{B}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$, skąd: $\frac{B}{r_1} - a_2 = \frac{r_2}{r_1}$; ilość więc, którąśmy oznaczyli w § 396 przez x_2, będzie tutaj widocznie $\frac{r_1}{r_2}$. Powtarzając powyższe rozumowanie, widzimy, że najbliższą wartością całkowitą tego ostatniego ułamka będzie iloraz powstały z podzielenia r_1 przez r_2. Oznaczając go przez a_3 i resztę z dzielenia przez r_3, będzie $\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2}$; skąd: $\frac{r_1}{r_2} - a_3 = \frac{r_3}{r_2}$, ilość więc x_3 będzie rowną $\frac{r_2}{r_3}$. I tak dalej powtarzamy ciągle toż samo działanie. Oczywistą jest rzeczą, że działanie, które służy do oznaczenia $x_1, x_2 \ldots$ i $a_1, a_2, a_3 \ldots$ jest takie samo, jak działanie, jakie należy wykonać, aby wynaleść największy wspólny dzielnik dla A i B; możemy je więc przedstawić w ten sposób:

	a_1	a_2	a_3	a_4
A	B	r_1	r_2	r_3 . . . . .
r_1	r_2	r_3	r_4	

Wiemy zaś, że tak postępując przyjdziemy w końcu do takiej reszty r_n, która w poprzedniej r_{n-1} mieścić się będzie całkowitą liczbę razy a_{n+1}; wtedy to całe działanie będzie ukończone. Ułamek więc $\frac{A}{B}$ przedstawi się pod postacią takiego ułamka ciągłego:

$$\frac{A}{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}}}.$$

399. I odwrotnie: każdy ułamek ciągły skończony może być zamieniony na ułamek zwyczajny. Ogólny i zarazem najdogodniejszy sposób takiej zamiany będzie pokazany później; tutaj objaśnimy na przykładzie możliwość takiego przekształcenia ułamka ciągłego na ułamek zwyczajny.

Weźmy ułamek ciągły:

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}.$$

Ostatni z ułamków cząstkowych, mianowicie $\frac{1}{4}$, należy do mianownika przedostatniego ogniwa, t. j. do 1. Włączając $1 + \frac{1}{4}$ w ułamek, otrzymamy $\frac{5}{4}$. Zamiast więc $1 + \frac{1}{4}$ możemy w mianowniku napisać $\frac{5}{4}$. Będzie zatem:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)}}}}\quad\text{czyli:}$$

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{5}}}}.$$

I w tem wyrażeniu ułamek ostatni $\frac{4}{5}$ należy do mianownika poprzedniego ogniwa t. j. do 2. Włączając $2+\frac{4}{5}$ w ułamek, otrzymamy $\frac{14}{5}$. Zatem będzie:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{14}{5}\right)}}}\text{, czyli:}$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{14}}}.$$

Włączając i tutaj ułamek $\frac{5}{14}$ z całkowitą 1 w ułamek, otrzymamy:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\left(\frac{19}{14}\right)}}\text{, czyli: }=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{14}{19}}.$$

I dalej: tenże sam ułamek ciągły równać się będzie:

$$2+\cfrac{1}{\frac{71}{19}}\text{, czyli: }2+\frac{19}{71},$$

i nakoniec po włączeniu tej ostatniej całkowitej z ułamkiem w ułamek:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}=\frac{161}{71}.$$

Oczywiście, ten sam sposób postępowania możemy zastosować w każdym przypadku, a nawet i do ułamka ciągłego skończonego wyrażonego pod postacią ogólną:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}}}}}.$$

Wyrażenie jednak ogólne, jakiebyśmy tą drogą otrzymali, byłoby zbyt zawiłe; i dlatego opuszczamy je, tembardziej, że później poznamy dogodniejszą drogę do znalezienia wypadku ostatecznego, a sposób wskazany wyżej, oprócz rozwlekłości rachunku, nie przedstawia żadnych szczególnych trudności. W każdym razie sposób ten dowodzi nam możliwości zamiany każdego ułamka ciągłego skończonego na ułamek zwyczajny.

400. Ułamki ciągłe nieskończone powstają z rozwinięcia wyrażeń niewymiernych. Że ilość niewymierna, będąc rozwiniętą na ułamek ciągły, nie może dać ułamka ciągłego skończonego, wypada to bezpośrednio z powyższego. Gdyby bowiem ilość niewymierna mogła się równać ułamkowi ciągłemu skończonemu, wtedy zamieniając go odwrotnie na ułamek zwyczajny, otrzymalibyśmy, że ilość niewymierna jest równą ułamkowi zwyczajnemu, co jak wiemy jest niemożliwe.

Sposoby wszakże rozwijania ilości niewymiernych na ułamek ciągły nie są tak proste, jak sposób, który podaliśmy wyżej dla ułamków zwyczajnych Każdego rodzaju ilość niewymierna wymaga osobnego sposobu do oznaczenia mianowników a_1, a_2, a_3.... ułamków cząstkowych. Tutaj pokażemy tylko jak rozwinąć na ułamek ciągły ilość niewymierną pierwiastkową stopnia drugiego, czyli pierwiastek kwadratowy z liczby, która nie jest zupełnym kwadratem.

Weźmy jako przykład $\sqrt{17}$; zwracając uwagę na oznaczenia, przyjęte w § 396 będzie $x = \sqrt{17}$. Liczba całkowita, która najbardziej zbliża się do $\sqrt{17}$, będąc od niego mniejsza, jest 4; to zatem, co jest oznaczone w powołanym wyżej paragrafie przez a_1, jest tutaj równe 4. Będzie więc: $x - a_1 = \sqrt{17} - 4$, a ilość, która w § 396 jest oznaczona przez x_1, czyli $\frac{1}{x - a_1}$, jest tutaj $x_1 = \frac{1}{\sqrt{17} - 4}$. Aby znaleść liczbę całkowitą, najbardziej zbliżoną do ilości x_1, zamieńmy to ostatnie wyrażenie na ułamek z mianownikiem wymiernym przez pomnożenie licznika i mianownika przez $\sqrt{17} + 4$ (patrz § 315). Otrzymamy:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{17} - 4} = \frac{\sqrt{17} + 4}{(\sqrt{17} - 4)(\sqrt{17} + 4)} = \frac{\sqrt{17} + 4}{17 - 16},$$

czyli:

$$x_1 = \sqrt{17} + 4.$$

Ponieważ $\sqrt{17}$ jest równy 4 więcej ilość mniejsza od jedności, przeto wartością całkowitą, najbardziej zbliżoną do x_1 będzie tutaj 8. Przeto $a_2 = 8$. Mamy dalej:

$$x_1 - a_2 = \sqrt{17} + 4 - 8 = \sqrt{17} - 4, \text{ skąd:}$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{17} - 4}.$$

Zamieniając to ostatnie wyrażenie na ułamek z mianownikiem wymiernym, znajdziemy, że:

$$x_2 = \frac{\sqrt{17} + 4}{17 - 16} = \sqrt{17} + 4.$$

Najbliższa wartość całkowita tego wyrażenia jest znowuż 8, czyli będzie $a_3 = 8$. I dalej otrzymamy:

$$x_2 - a_3 = \sqrt{17} + 4 - 8 = \sqrt{17} - 4,$$

skąd:

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_3} = \frac{1}{\sqrt{17} - 4} = \sqrt{17} + 4,$$

a następnie: $a_4 = 8$, i $x_3 - a_4$ znowuż $= \sqrt{17} - 4$.

I tak dalej. Widzimy z tego, że działanie to nigdy się nie skończy, a także i to, że wartości na x_1, x_2, x_3..., a tem samem i wartości na a_2, a_3, a_4... są ciągle też same. Powtarzając więc rozumowanie § 396, otrzymamy:

$$x = \sqrt{17} = 4 + \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = 8 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = 8 + \frac{1}{x_3}, \text{ i t. d., skąd:}$$

$$\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \dots}}}$$

Do tegoż samego wypadku moglibyśmy dojść jeszcze i takim rachunkiem: Ponieważ $\sqrt{17}$ jest zawarty między 4 i 5, przeto możemy powiedzieć, że on jest równy 4 więcej pewien ułamek właściwy (rozumiejąc tutaj pod wyrazem ułamek właściwy wogóle ilość mniejszą od jedności), który oznaczymy przez $\frac{1}{x_1}$. Będzie więc:

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{x_1}.$$

Aby znaleść ilość x_1, przenieśmy 4 na pierwszą stronę i zmieńmy porządek stron, otrzymamy:

$$\frac{1}{x_1} = \sqrt{17} - 4,$$

skąd:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{17} - 4}.$$

W tym ostatnim ułamku uczyńmy mianownik wymiernym, będzie:

$$x_1 = \sqrt{17} + 4.$$

A ponieważ $\sqrt{17}$ jest równy 4, więcej pewna ilość mniejsza od jedności, przeto:

$$x_1 = 8 + \frac{1}{x_2}.$$

W celu znalezienia x_2, weźmy znowuż pod uwagę równość:

$$\sqrt{17} + 4 = 8 + \frac{1}{x_2};$$

z niej otrzymamy:

$$\frac{1}{x_2} = \sqrt{17} - 4,$$

a następnie:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{17} - 4} = \sqrt{17} + 4.$$

Będzie więc znowuż:

$$x_2 = 8 + \frac{1}{x_3},$$

gdzie x_3 możemy w podobny sposób oznaczyć tak, jak powyższe wartości. Będzie więc:

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{x_1},$$

gdzie: $$x_1 = 8 + \frac{1}{x_2},$$

gdzie: $$x_2 = 8 + \frac{1}{x_3},$$

$$x_3 = 8 + \frac{1}{x_4}$$

$$\cdots\cdots$$

skąd ostatecznie:

$$\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \ldots}}}$$

401. Jako drugi przykład weźmy ogólne wyrażenie $\sqrt{m^2 + 1}$, gdzie m oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Tutaj $x = \sqrt{m^2 + 1}$. Liczba całkowita najwięcej zbliżona do wartości tego pierwiastku i od niego mniejsza jest m, będzie przeto: $a_1 = m$, skąd:

$$x - a_1 = \sqrt{m^2 + 1} - m, \text{ a następnie:}$$

$$x_1 = \frac{1}{x - a_1} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} - m}.$$

Zamieniając ostatni ułamek na ułamek z mianownikiem wymiernym, do czego dochodzimy przez pomnożenie obu jego wyrazów przez $\sqrt{m^2 + 1} + m$, otrzymamy:

$$x_1 = \frac{\sqrt{m^2 + 1} + m}{(\sqrt{m^2 + 1} - m)\,(\sqrt{m^2 + 1} + m)} = \frac{\sqrt{m^2 + 1} + m}{m^2 + 1 - m^2},$$

czyli: $$x_1 = \sqrt{m^2 + 1} + m.$$

Ponieważ zaś liczbą całkowitą, najwięcej zbliżoną do $\sqrt{m^2+1}$ jest m, przeto liczbą całkowitą najbliższą x_1, będzie $2m$. Jest więc:

$$a_2 = 2m, \text{ a następnie:}$$

$$x_1 - a_2 = \sqrt{m^2+1} + m - 2m = \sqrt{m^2+1} - m.$$

Skąd:

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1} - m}.$$

Powtarzając w dalszym ciągu toż samo rozumowanie, znajdziemy ostatecznie:

$$x = \sqrt{m^2+1} = m + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{2m + \ldots}}}$$

Na zasadzie powyższego wyrażenia możemy odrazu rozwijać na ułamki ciągłe wszystkie ilości pierwiastkowe, w których pod znakiem pierwiastku znajduje się liczba całkowita, równa kwadratowi zupełnemu (m^2) powiększonemu o 1. Przykład poprzedni odnosi się właśnie do tego przypadku, gdyż: $\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{4^2+1}$. Tutaj więc: $m = 4$. W podobnym przypadku będą jeszcze: $\sqrt{10} = \sqrt{3^2+1}$; $\sqrt{26} = \sqrt{5^2+1}$; $\sqrt{37} = \sqrt{6^2+1}$ i t. d.

402. Jako dalszy przykład weźmy $\sqrt{42}$. Liczbą całkowitą, najwięcej zbliżoną do wartości tego pierwiastku jest 6, przyjmując więc też same oznaczenia, których już tyle razy używaliśmy, będzie $a_1 = 6$, a następnie: $x - a_1 = \sqrt{42} - 6$, skąd: $x_1 = \frac{1}{x - a_1} = \frac{1}{\sqrt{42} - 6}$. Zamieniając ten ułamek na ułamek z mianownikiem wymiernym, otrzymamy:

$$x_1 = \frac{\sqrt{42}+6}{(\sqrt{42}-6)(\sqrt{42}+6)} = \frac{\sqrt{42}+6}{42-36} = \frac{\sqrt{42}+6}{6}.$$

Aby znaleść liczbę całkowitą najwięcej zbliżoną do x_1, zwróćmy uwagę na to, że $\sqrt{42}$ jest równy 6 więcej pewna ilość, mniejsza od jedności, zatem $\sqrt{42} + 6$ jest równe 12 więcej pewna ilość, mniejsza od jedności. Jeżeli teraz $\sqrt{42} + 6$ podzielimy przez 6, otrzymamy na iloraz 2 więcej pewna ilość mniejsza od jedności.

Zatem liczbą całkowitą, najbardziej zbliżoną do $\frac{\sqrt{42} - 6}{6}$ będzie 2, czyli $a_2 = 2$. Dalej będzie:

$$x_1 - a_2 = \frac{\sqrt{42}+6}{6} - 2 = \frac{\sqrt{42}-6}{6},$$

skąd:

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2} = \frac{6}{\sqrt{42}-6}.$$

Czyniąc mianownik wymiernym w tym ostatnim ułamku, otrzymamy:

$$x_2 = \frac{6(\sqrt{42}+6)}{(\sqrt{42}-6)(\sqrt{42}+6)} = \frac{6(\sqrt{42}+6)}{6} = \sqrt{42}+6.$$

Liczbą całkowitą, najbliższą x_2 będzie tutaj 12; przeto: $a_3 = 12$, a następnie:

$$x_2 - a_3 = \sqrt{42} + 6 - 12 = \sqrt{42} - 6,$$

skąd:

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_3} = \frac{1}{\sqrt{42}-6}.$$

Powtarzając poprzednie rozumowanie i rachunek, znajdziemy że:

$$a_4 = 2;\ x_4 = \frac{1}{x_3 - a_4} = \frac{6}{\sqrt{42}-6},$$

skąd: $a_5 = 12$, i t. d.

I tutaj widzimy, jak w przykładach poprzednich, że działanie nigdy się nie skończy, gdyż na żadną z ilości x nie otrzymamy wprost wartości całkowitej. Szukany ułamek ciągły nieskończony będzie:

$$\sqrt{42} = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}$$

Podobny rachunek zastosowany do wyrażenia $\sqrt{m^2 + m}$, da nam:

$$\sqrt{m^2 + m} = m + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2m + \ldots}}}}$$

Powtórzenie tychże samych rozumowań w następnych przykładach pozostawiamy czytelnikowi:

1) $\sqrt{48}$, tutaj będzie: $a_1 = 6$, $a_2 = 1$, $a_3 = 12$, $a_4 = 1$, $a_5 = 12$ i t. d. skąd:

$$\sqrt{48} = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}$$

2) $$\sqrt{m^2 + 2m} = m + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2m + \ldots}}}}$$

3) $$\sqrt{47} = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}}}}}$$

Ułamki ciągłe, otrzymane w poprzednich rozwinięciach, są nie tylko nieskończonymi, ale nadto takimi, że w każdym z nich mianowniki ogniw powtarzają się w tym samym porządku. Tak np. w rozwinięciu $\sqrt{37}$ powtarza się mianownik 12; w rozwinięciu $\sqrt{42}$ powtarzają się mianowniki 2 i 12; w rozwinięciu $\sqrt{47}$ powtarzają się mianowniki 1, 5, 1, 12 i t. d. Tego rodzaju ułamki ciągłe nieskończone nazywają się *peryodycznymi*. Zbyteczną niemal rzeczą jest dodawać, że nie są one jedynymi ułamkami ciągłymi nieskończonymi; oprócz nich są jeszcze ułamki ciągłe nieskończone i nieperyodyczne.

Ułamki ciągłe peryodyczne powstają zawsze z rozwinięcia ilości pierwiastkowych stopnia drugiego. Dowiedziemy w dalszym ciągu wykładu, że ułamek ciągły peryodyczny może być zawsze zamieniony na ilość pierwiastkową stopnia drugiego, gdyż jest on równym jednemu z pierwiastków równania stopnia drugiego. Można dowieść dalej, że i odwrotnie ilość pierwiastkowa stopnia drugiego daje w rozwinięciu zawsze tylko ułamek peryodyczny. Dowiedzenie tej drugiej części, podane po raz pierwszy przez Lagrange'a, przechodzi po za ramy niniejszej książki. Inne ilości niewymierne dają rozwinięcia nieskończone i nieperyodyczne.

403. Poznawszy sposoby otrzymywania ułamków ciągłych, zajmiemy się teraz ich własnościami. Przypuśćmy, że mamy ułamek ciągły jakikolwiek (t. j. skończony lub nieskończony):

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}$$

Jeżeli, zaczynając od a_1, weźmiemy jakąkolwiek liczbę ułamków cząstkowych, i na ostatnim z nich zatrzymamy się, wtedy otrzymamy pewien ułamek ciągły skończony. Ułamek ten możemy zamienić na ułamek zwyczajny; wykonawszy tę zamianę otrzymamy ułamek, który nazywać będziemy *reduktem* lub *przybliżeniem* danego ułamka ciągłego.

Tak np. zamieniając ułamki ciągłe *skończone:*

$$a_1 + \frac{1}{a_2}, \text{ lub } \quad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}, \text{ lub } a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}$$

i t. p. na ułamki zwyczajne, otrzymamy różne przybliżenia czyli redukty danego ułamka ciągłego. Dla odróżnienia jednego reduktu od drugiego, oznaczamy każdy dodaniem do wyrazu „przybliżenie" lub „redukt" liczby porządkowej, pokazującej ile ogniw ułamka ciągłego wchodzi do składu tegoż przybliżenia. I tak: przybliżeniem *pierwszem* będzie a_1 (w razie, gdyby w ułamku ciągłym pierwszej całkowitej nie było, będziemy pisać jako pierwsze przybliżenie 0); przybliżeniem *drugiem* będzie ułamek zwyczajny, powstały z zamiany $a_1 + \frac{1}{a_2}$ na ułamek; przybliżeniem *trzeciem* ułamek zwyczajny, powstały z zamiany:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$$

i t. d.; i w ogólności przybliżeniem n-tem będzie ułamek zwyczajny, powstały z ułamka:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\cdot}{\ddots + \cfrac{1}{a_n.}}}}$$

Każde przybliżenie oznaczać będziemy w ten sposób: $\frac{P}{Q}$; dla pokazania zaś, o którem przybliżeniu jest mowa, przy liczniku P i mianowniku Q pisać będziemy u dołu wskazówkę, wyrażającą miejsce, jakie przybliżenie zajmuje w szeregu wszystkich przybliżeń. Mianowicie: przybliżenie pierwsze będzie: $\frac{P_1}{Q_1}$, przybliżenie drugie: $\frac{P_2}{Q_2}$, przybliżenie trzecie: $\frac{P_3}{Q_3}$, i wogóle przybliżenie n-te: $\frac{P_n}{Q_n}$. To ostatnie będziemy pisać niekiedy dla skrócenia bez wskazówek dolnych tak: $\frac{P}{Q}$.

Tym sposobem będzie:

$$\frac{P_1}{Q_1} = a_1; \quad \frac{P_2}{Q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2}; \quad \frac{P_3}{Q_3} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}};$$

i t. d.; w ogólności:

$$\frac{P_n}{Q_n} \text{ lub } \frac{P}{Q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{\cdot}{\ddots + \cfrac{1}{a_n.}}}}}$$

404. W § 399 był pokazany sposób, jakim każdy z tych ułamków ciągłych może być zamieniony na ułamek zwyczajny. Możemy go tutaj bezwątpienia zastosować i otrzymać wartości $\frac{P_2}{Q_2}$, $\frac{P_3}{Q_3}$ .... $\frac{P_n}{Q_n}$. Lecz sposób ten jest długi, a nadewszystko używając go, nie łatwo odkryć związek, jaki zachodzi pomiędzy rozmaitemi przybliżeniami $\frac{P}{Q}$. Dlatego też to podamy tutaj inny sposób wynajdywania wszystkich przybliżeń.

Przybliżenie pierwsze, jak wiemy, jest takie:

$$\frac{P_1}{Q_1} = a_1 = \frac{a_1}{1}.$$

Przybliżenie drugie otrzyma się, włączając w wyrażeniu $a_1 + \frac{1}{a_2}$ całkowitą z ułamkiem w ułamek. Będzie więc:

$$\frac{P_2}{Q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} \; \ldots\ldots \; (1).$$

Przybliżenie trzecie otrzymamy ze zwinięcia ułamka ciągłego:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}.$$

Różni się ono od poprzedniego tem, że dobrane zostało jeszcze jedno ogniwo $\frac{1}{a_3}$, które należy do mianownika a_2.

Zamiast więc wykonywać zamianę tego ułamka na zwyczajny możemy także powiedzieć, że przybliżenie to otrzyma się z przybliżenia poprzedniego $\frac{P_2}{Q_2}$ *podstawiając w niem* $a_2 + \frac{1}{a_3}$ *zamiast* a_2. Ta uwaga jest zasadniczą i służy do wynalezienia związku pomiędzy następującemi po sobie przybliżeniami. Będzie więc:

$$\frac{P_3}{Q_3} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{a_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + 1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}.$$

czyli:

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{a_1\left(\frac{a_2 a_3 + 1}{a_3}\right) + 1}{\frac{a_2 a_3 + 1}{a_3}}.$$

Mnożąc licznik i mianownik ułamka, będącego na drugiej stronie równości, przez a_3, w celu pozbycia się mianownika, i znosząc nawias otrzymamy:

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1};$$

a wyłączając a_3 z dwóch wyrazów licznika za nawias, będzie:

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{(a_1 a_2 + 1)\, a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1}.$$

Jeżeli teraz porównamy ten wypadek z wartościami przybliżeń: $\frac{P_1}{Q_1}$ i $\frac{P_2}{Q_2}$, przekonamy się, że przybliżenie trzecie

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_2 a_3 + P_1}{Q_2 a_3 + Q_1} \ldots (2),$$

gdyż ilość $a_1\ a_2 + 1$ w liczniku jest równa P_2, a_1 jest licznikiem przybliżenia pierwszego, a więc $= P_1$; a_2 w mianowniku jest mianownikiem przybliżenia drugiego, t. j. Q_2, nakoniec 1 jest mianownikiem przybliżenia pierwszego.

Gdybyśmy chcieli z tego przybliżenia otrzymać następnie przybliżenie czwarte, to jest:

$$\frac{P_4}{Q_4} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}},$$

wtedy należałoby we wzorze (2) podstawić $a_3 + \frac{1}{a_4}$ zamiast a_3. Czyniąc to znajdziemy:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{P_2\left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) + P_1}{Q_2\left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) + Q_1};$$

znosząc nawias w liczniku i mianowniku drugiej strony, będzie:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{P_2 a_3 + P_1 + \frac{P_2}{a_4}}{Q_2 a_3 + Q_1 + \frac{Q_2}{a_4}},$$

mnożąc zaś licznik i mianownik tego ostatniego ułamka przez a_4, otrzymamy:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{(P_2 a_3 + P_1)\, a_4 + P_2}{(Q_2 a_3 + Q_1)\, a_4 + Q_2}.$$

Jeżeli zwrócimy uwagę na to, że podług wzoru (2): $P_2 a_3 + P_1 = P_3$, a $Q_2 a_3 + Q_1 = Q_3$, i wartości te podstawimy w równość powyższą, wówczas otrzymamy ostatecznie:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{P_3 a_4 + P_2}{Q_3 a_4 + Q_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \quad .$$

Widzimy z tego, że przybliżenie czwarte jest ułamkiem, którego licznik jest równy licznikowi przybliżenia trzeciego, pomnożonemu przez mianownik ułamka cząstkowego czwartego, więcej licznik przybliżenia drugiego; mianownik zaś jest równy podobnie mianownikowi przybliżenia trzeciego, pomnożonemu przez mianownik ułamka cząstkowego czwartego, więcej mianownik przybliżenia drugiego.

Tak samo jak znaleźliśmy przybliżenie czwarte, moglibyśmy znaleść i przybliżenie piąte; — mianowicie należałoby w równości (3) podstawić $a_4 + \frac{1}{a_5}$ zamiast a_4 i postępować jak wyżej. Otrzymalibyśmy wtedy:

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{P_4 a_5 + P_3}{Q_4 a_5 + Q_3},$$

skąd okazuje się, że licznik i mianownik piątego przybliżenia w podobny sposób jest utworzony z wyrazów przybliżeń: czwartego i trzeciego, a także i mianownika ogniwa piątego, jak był utworzony licznik i mianownik przybliżenia czwartego z wyrazów przybliżeń trzeciego i drugiego i z mianownika ogniwa czwartego. Możemy więc zapytać się, czy ten sposób tworzenia się każdego przybliżenia z dwóch poprzednich i z mianownika ostatniego ogniwa, na którym zatrzymujemy się, jest ogólny, t. j. czy daje się zastosować do wszystkich przybliżeń? Aby na to pytanie odpowiedzieć, użyjemy tutaj tego sposobu rozumowania, który nazywamy *indukcyą matematyczną*. Mianowicie: weźmy pod uwagę ułamek ciągły:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cdots}}}}}}$$

i przypuśćmy, że pomiędzy przybliżeniami: $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$, (z których pierwsze odpowiada mianownikowi a_{n-2}, drugie a_{n-1}, trzecie zaś mianownikowi a_n) zachodzi taki związek, jaki widzieliśmy np. dla przybliżeń drugiego, trzeciego i czwartego, to jest, że:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}\, a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}\, a_n + Q_{n-2}}, \quad . \quad . \quad (4)$$

czyli innemi słowami, przypuśćmy, że P_n i Q_n są utworzone podług takiego prawa:

$$P_n = P_{n-1}\, a_n + P_{n-2} \text{ i } Q_n = Q_{n-1}\, a_n + Q_{n-2}.$$

Dowiedziemy, że tenże sam związek zachodzić będzie pomiędzy $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, to jest, że i następne przybliżenie będzie utworzone podług tegoż samego prawa. W tym celu należy tylko zwrócić uwagę na to, że przybliżenie $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ tworzy się przez dobranie do tej części ułamka ciągłego, z której powstało $\frac{P_n}{Q_n}$, jeszcze ogniwa $\frac{1}{a_{n+1}}$, że zatem przybliżenie $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ otrzymamy z przybliżenia $\frac{P_n}{Q_n}$, podstawiając w niem $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ zamiast a_n. Będzie więc:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + Q_{n-2}},$$

skąd, znosząc nawiasy w liczniku i mianowniku:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2} + \frac{P_{n-1}}{a_{n+1}}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2} + \frac{Q_{n-1}}{a_{n+1}}},$$

mnożąc zaś licznik i mianownik drugiej strony przez a_{n+1}, będzie:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{(P_{n-1}a_n + P_{n-2})a_{n+1} + P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_n + Q_{n-2})a_{n+1} + Q_{n-1}}.$$

Jeżeli teraz zwrócimy uwagę na to, że podług założenia:

$P_{n-1}a_n + P_{n-2} = P_n$, i $Q_{n-1}a_n + Q_{n-2} = Q_n$,

otrzymamy ostatecznie:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}};$$

a ta ostatnia równość pokazuje nam, że podług tegoż samego

prawa jest utworzone przybliżenie $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ z przybliżeń $\frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i mianownika a_{n+1}.

Skoro zaś widzieliśmy, że podług tego prawa było utworzone przybliżenie piąte, przeto na zasadzie dowiedzionego twierdzenia w tenże sam sposób będzie utworzone i przybliżenie szóste, przeto podług tegoż samego prawa będzie utworzone i przybliżenie siódme i t. d., t j, że znaleziony powyżej sposób tworzenia się kolejnych przybliżeń jest ogólny. Możemy zatem powiedzieć, że:

Licznik każdego przybliżenia, zacząwszy od trzeciego, jest równy licznikowi przybliżenia poprzedzającego, pomnożonemu przez mianownik tego ogniwa, na którym się zatrzymujemy, więcej licznik przybliżenia przed-poprzedzającego; mianownik jest także w ten sam sposób związany z mianownikami dwóch przybliżeń poprzedzających i mianownikiem ogniwa, na którym się zatrzymujemy.

Np. Niech będzie dany ułamek zwyczajny: $\frac{151}{347}$. Rozwinąwszy go na ułamek ciągły (sposobem podanym w § 395), znajdziemy:

$$\frac{151}{347} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}}}}}.$$

Przybliżenia kolejne tego ułamka ciągłego będą:

$$\frac{P_1}{Q_1} = 0 = \frac{0}{1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{P_2\,.\,3+P_1}{Q_2\,.\,3+Q_1}=\frac{1\,.\,3+0}{2\,.\,3+1}=\frac{3}{7},$$

$$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{3\,.\,2+1}{7\,.\,2+2}=\frac{7}{16},$$

$$\frac{P_5}{Q_5}=\frac{7\,.\,1+3}{16\,.\,1+7}=\frac{10}{23},$$

$$\frac{P_6}{Q_6}=\frac{10\,.\,4+7}{23\,.\,4+16}=\frac{47}{108},$$

$$\frac{P_7}{Q_7}=\frac{47\,.\,3+10}{108\,.\,3+23}=\frac{151}{347}.$$

Ostatnie przybliżenie jest równe wartości ułamka danego, jak powinno być.

Jako drugi przykład weźmiemy rozwinięcie, dane wyżej $\sqrt{42}$.

$$\sqrt{42}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\ldots}}}}$$

Przybliżenia kolejne tego ułamka ciągłego będą:

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{6}{1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=6+\frac{1}{2}=\frac{13}{2},$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{13\,.\,12+6}{2\,.\,12+1}=\frac{156+6}{24+1}=\frac{162}{25},$$

$$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{162\,.\,2+13}{25\,.\,2+2}=\frac{337}{52},$$

i tak dalej;—tu oczywiście szereg tych przybliżeń nigdy się nie skończy. Każde z nich możemy wziąć za przybliżoną

wartość $\sqrt{42}$; zobaczymy później, jak oznaczyć stopień przybliżenia w każdym przypadku.

405. Wiedząc, w jaki sposób tworzą się przybliżenia, poznamy teraz główne ich własności.

Najprzód, widoczą jest rzeczą z samego sposobu tworzenia się przybliżeń, że, z wyjątkiem dwóch pierwszych, licznik każdego przybliżenia jest większy od licznika przybliżenia poprzedzającego, i mianownik każdego przybliżenia jest większy od mianownika przybliżenia poprzedzającego. Gdyż:

$$P_{n+1}=P_n\,a_{n+1}+P_{n-1},$$

a ponieważ wszystkie liczby wchodzące do tej równości są dodatnie, i a_{n+1} jest conajmniej równe jedności, przeto: $P_{n+1}>P_n$.

406. *Różnica pomiędzy dwoma po sobie następującemi przybliżeniami jest równą ułamkowi, którego licznikiem jest jedność wzięta ze znakiem + lub —, a mianownikiem iloczyn z mianowników tychże przybliżeń.*

Na przykładach § 404 własność ta oczywiście sprawdza się. I tak weźmy przykład ostatni, w nim:

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{6}{1};\quad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{13}{2},\ \text{przeto:}$$

$$\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}=\frac{13}{2}-\frac{6}{1}=\frac{13-12}{1\,.\,2}=\frac{1}{2}.$$

Podobnie:

$$\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_2}{Q_2}=\frac{162}{25}-\frac{13}{2}=\frac{324-325}{50}=-\frac{1}{50},\quad \text{i t. d.}$$

Przechodząc do wyrażeń ogólnych łatwo widzieć, że w ułamku ciągłym:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{\ddots}{\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}+\ldots}}}}}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} = \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) - a_1 = +\frac{1}{a_2}.$$

Aby znaleść różnicę pomiędzy trzeciem i drugiem przybliżeniem, zauważmy najprzód, że:

$$\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_3\, Q_2 - P_2\, Q_3}{Q_2\, Q_3},$$

mianownik tej różnicy jest więc iloczynem mianowników tych dwóch przybliżeń. Wartość licznika $P_3\, Q_2 - P_2\, Q_3$ możnaby wynaleść, podstawiając zamiast P_2, Q_2, P_3 i Q_3 ich wartości, wyrażone za pomocą a_1, a_2 i a_3. Lecz aby uniknąć zbyt rozwlekłych rachunków, możemy tak postąpić: Ponieważ, podług prawa tworzenia się przybliżeń:

$$P_3 = P_2\, a_3 + P_1\,; \quad Q_3 = Q_2\, a_3 + Q_1\,,$$

przeto podstawiając te wartości w wyrażenie $P_3\, Q_2 - P_2\, Q_3$, otrzymamy:

$$P_3\, Q_2 - P_2\, Q_3 = (P_2\, a_3 + P_1)\, Q_2 - (Q_2\, a_3 + Q_1)\, P_2,$$

czyli:

$$P_3\, Q_2 - P_2\, Q_3 = P_1\, Q_2 - P_2\, Q_1\,.$$

A że:

$$P_1 = a_1\,; \quad P_2 = a_1\, a_2 + 1$$
$$Q_1 = 1\,; \quad Q_2 = a_2\,,$$

więc:

$$P_3\, Q_2 - P_2\, Q_3 = a_1\, a_2 - (a_1\, a_2 + 1) = -1.$$

Skąd wypada, że

$$\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{-1}{Q_2\, Q_3}.$$

W podobny sposób moglibyśmy znaleść, że różnica:

$$\frac{P_4}{Q_4} - \frac{P_3}{Q_3} = \frac{+1}{Q_3\, Q_4}.$$

Dowiedziemy teraz, że licznik różnicy pomiędzy dwoma któremikolwiek przybliżeniami jest ilością stałą, co do swojej

liczebnej wartości. W tym celu weźmy trzy którekolwiek po sobie następujące przybliżenia:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \ \frac{P_n}{Q_n} \ \text{i} \ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},$$

odpowiadające mianownikom:

$$a_{n-1}\,, \ a_n \ \text{i} \ a_{n+1}\,,$$

i znajdźmy najprzód różnicę pomiędzy $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$, a następnie pomiędzy $\frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$. Będzie:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_n}{Q_{n-1}\, Q_n}$$

i dalej:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1}\, Q_n - P_n\, Q_{n+1}}{Q_n\, Q_{n+1}}$$

Lecz ponieważ, podług prawa tworzenia się przybliżeń, mamy:

$$P_{n+1} = P_n\, a_{n+1} + P_{n-1}, \quad Q_{n+1} = Q_n\, a_{n+1} + Q_{n-1} \ (\S\ 404)$$

przeto:

$$P_{n+1}\, Q_n - P_n\, Q_{n+1} = (P_n\, a_{n+1} + P_{n-1})\, Q_n - $$
$$- P_n\, (Q_n\, a_{n+1} + Q_{n-1}),$$

czyli:

$$P_{n+1}\, Q_n - P_n\, Q_{n+1} = P_{n-1}\, Q_n - P_n\, Q_{n-1}.$$

A że licznik różnicy poprzedniej był:

$$P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_n\,,$$

przeto:

$$P_{n+1}\, Q_n - P_n\, Q_{n+1} = -(P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_n).$$

Ta równość pokazuje nam, że licznik różnicy pomiędzy dwoma przybliżeniami: $(n+1)$-tem i n-tem jest równy co do swojej liczebnej wartości licznikowi różnicy pomiędzy przybliżeniem n-em i $(n-1)$-em, a tylko ma znak przeciwny.

A że te przybliżenia są jakiemikolwiek w szeregu wszystkich przybliżeń, przeto możemy stąd wyprowadzić wniosek, że licznik różnicy dwóch następujących po sobie przybliżeń jest stały co do swojej liczebnej wartości; znak tylko w nim kolejno się zmienia. Lecz widzieliśmy wyżej, że licznik różnicy pomiędzy np. trzeciem, i drugiem przybliżeniem jest —1, więc we wszystkich różnicach licznik ten jest także =1, tylko znak przed nim może być + lub —, stosownie do miejsca, jakie zajmują uważane przybliżenia w szeregu wszystkich przybliżeń. Mianowicie: licznik różnicy pomiędzy drugiem a pierwszem przybliżeniem jest + 1; licznik różnicy pomiędzy trzeciem i drugiem przybliżeniem jest — 1; licznik różnicy pomiędzy czwartem i trzeciem przybliżeniem będzie znowuż + 1, i t. d. Wogóle więc licznik różnicy pomiędzy dwoma przybliżeniami po sobie następującemi będzie wtedy — 1, gdy odejmujemy od przybliżenia porządku *nieparzystego* przybliżenie poprzedzające; w przeciwnym razie licznik ten jest + 1. Wyrazić to możemy w ten sposób:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n\,Q_{n+1}} \quad \ldots\ldots (1).$$

Ilość $(-1)^{n+1}$ służy tutaj do oznaczenia znaku różnicy; liczebna wartość jej jest zawsze 1: ponieważ ilość ujemna, podniesiona do potęgi parzystej, daje wypadek dodatni, a podniesiona do potęgi nieparzystej daje wypadek ujemny, przeto znak przy $(-1)^{n+1}$ będzie wtedy +, jeżeli $n+1$ będzie parzyste, a — wtedy, gdy $n+1$ będzie nieparzyste.

Znosząc mianownik w równości (1), otrzymamy inne wyrażenie tej samej własności:

$$P_{n+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1} = (-1)^{n+1} \quad \ldots\ldots (2).$$

407. Jako bezpośredni wniosek z powyższej wypada własność następująca:

Licznik i mianownik każdego przybliżenia są liczbami pierwszemi względem siebie.

W rzeczy samej: przypuśćmy, że największy wspólny dzielnik dla licznika i mianownika przybliżenia $\frac{P_n}{Q_n}$ jest d. Wtedy i ilość $P_{n+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1}$ musi być podzielną przez d, gdyż P_n i Q_n są osobno podzielne przez d. A że:

$$P_{n+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1} = (-1)^{n+1},$$

przeto i druga strona powyższej równości musi być podzielną przez d. Lecz wartość tej drugiej strony jest ± 1, stosownie do tego czy $n+1$ jest parzyste lub nie, więc i d nie może być różne od 1.

408. *Całkowita wartość x ułamka ciągłego*

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}$$

jest zawarta pomiędzy dwoma po sobie następującemi przybliżeniami, t. j. jeżeli jest większą od przybliżenia $\frac{P_n}{Q_n}$, to będzie mniejszą od przybliżenia następnego $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, i odwrotnie.

Do tego wniosku przychodzimy, zastanawiając się nad tem, z czego się składa każde przybliżenie. Pierwsze przybliżenie jest a_1: jest ono widocznie mniejsze od całkowitej wartości ułamka ciągłego x, gdyż opuszczamy tutaj część dodatnią $\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots\ldots}}$ Drugie przybliżenie powstało z $a_1 + \frac{1}{a_2}$; jest ono większe od całkowitej wartości x ułamka ciągłego, gdyż tutaj opuszczamy część $\cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots\ldots}}$, którą należy dodać do samego mianownika a_2, aby otrzymać wartość x. Biorąc a_2 zamiast prawdziwego mianownika, bierzemy mianownik za mały, a więc wartość ułamka, powstałego z $a_1 + \frac{1}{a_2}$ będzie za wielką w porównaniu do x. I t. d., rozumowanie to możemy rozciągnąć do wszystkich następnych przybliżeń.

Lecz toż samo twierdzenie dowiedziemy innym sposobem. W tym celu zachowajmy dla głoski x toż samo znaczenie jak dotąd, t. j. uczyńmy:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cdots}}}};$$

oznaczmy dalej przez $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$ dwa po sobie następujące przybliżenia, i postarajmy się znaleść różnice $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $x - \frac{P_n}{Q_n}$. Jeżeli się okaże, że te różnice *w każdym przypadku* mają znaki przeciwne, wtedy twierdzenie będzie dowiedzione, gdyż z tego wypadnie, że jeżeli x będzie np. większe od $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, wtedy toż samo x będzie mniejsze od $\frac{P_n}{Q_n}$, i odwrotnie. Aby znaleść wspomniane wyżej różnice, wyrazimy najprzód x pod taką postacią, pod jaką przedstawiają się wszystkie przybliżenia.

Na zasadzie prawa tworzenia się przybliżeń mamy:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}}.$$

Gdybyśmy chcieli z tego przybliżenia otrzymać przybliżenie następne, wówczas należałoby w niem zamiast a_{n+1} podstawić $a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}$. Lecz, gdybyśmy zamiast a_{n+1} w wyrażenie na $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, podstawili:

$$a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{a_{n+3} + \cdots}},$$

to jest ten ułamek ciągły, jaki otrzymamy, biorąc wszystkie ułamki cząstkowe danego ułamka ciągłego od a_{n+1} aż do końca, wtedy oczywiście z przybliżenia $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ otrzymalibyśmy całkowitą wartość ułamka ciągłego.

Jeżeli więc uczynimy:

$$y = a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{a_{n+3} + \cdots}}$$

wtedy podstawiając y zamiast a_{n+1} w wyrażenie na $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, otrzymamy wartość całkowitą ułamka ciągłego. Zwracamy uwagę czytelnika na to, że ilość y ma takież samo znaczenie, co i x_n w § 396. Będzie zatem:

$$x = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

To bardzo ważne wyrażenie służyć nam będzie nietylko do znalezienia szukanych różnic $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $x - \frac{P_n}{Q_n}$, ale nadto w wielu innych przypadkach.

Wyraziwszy tak x, poszukajmy teraz różnic wymienionych wyżej. Będzie:

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$$

czyli, sprowadzając ułamki drugiej strony tej równości do jednakowego mianownika:

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n Q_{n-1} y + P_{n-1} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n y - P_{n-1} Q_{n-1}}{(Q_n y + Q_{n-1}) Q_{n-1}},$$

skąd, po zrobieniu redukcyi wyrazów podobnych i wyłączeniu y za nawias z wyrazów pozostałych:

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) y}{Q_{n-1}(Q_n y + Q_{n-1})} \quad \ldots (2)$$

Podobnie dla znalezienia różnicy $x - \frac{P_n}{Q_n}$, podstawmy zamiast x jego wartość z równości (1). Otrzymamy:

$$x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n};$$

postępując zaś z drugą stroną powyższej równości tak samo, jak postępowaliśmy przy $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, znajdziemy ostatecznie:

$$x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1}}{Q_n (Q_n y + Q_{n-1})} \quad \ldots (3)$$

Porywnywając z sobą drugie strony równości (2) i (3), widzimy, że one *koniecznie* mają znaki przeciwne. Gdyż mianowniki ich są dodatnie, również jak i ilość y, znajdująca się w liczniku drugiej strony równości (2); znaki zatem drugich stron tych równości zależą od ilości: $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n$ i $P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1}$. Widoczną zaś jest rzeczą, że ilości te mają znaki przeciwne.

Jeżeli więc $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ jest dodatnie, t. j. jeżeli $x > \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, wtedy $x - \frac{P_n}{Q_n}$ *musi* być ujemne, t. j. musi być $x < \frac{P_n}{Q_n}$; i odwrotnie jeżeli $x < \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, wtedy będzie: $x > \frac{P_n}{Q_n}$. Nierówności te często wyrażają w ten sposób:

albo będzie: $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < x < \frac{P_n}{Q_n}$,

albo też: $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > x > \frac{P_n}{Q_n}$.

Ponieważ podług własności dowiedzionej w paragrafie 406,

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n,$$

przeto równości (2) i (3) mogą być tak napisane:

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n y}{Q_{n-1}(Q_n y + Q_{n-1})}, \quad \ldots (4)$$

$$x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n (Q_n y + Q_{n-1})} \quad \ldots (5)$$

Gdybyśmy chcieli, na zasadzie tych równości, znaleść wartość różnicy pomiędzy x i któremkolwiek przybliżeniem, wtedy w jednej lub drugiej równości należałoby zamiast n podstawić odpowiednią liczbę. Tak np. chcąc znaleść, jaki znak ma różnica pomiędzy x i przybliżeniem pierwszem, należy albo w równości (4) uczynić $n = 2$, albo w równości (5) uczynić $n = 1$. I jedna i druga równość pokazuje, że ta różnica jest dodatnią, więc $x > \frac{P_1}{Q_1}$. Podobnie czyniąc w równości (5) $n = 2$, lub w równości (4) $n = 3$, wypada, że różnica pomiędzy x i $\frac{P_2}{Q_2}$ jest ujemną, czyli że $x < \frac{P_2}{Q_2}$, i t. d. Wypada stąd, że w ogóle: *x jest większe od każdego przybliżenia porządku nieparzystego a mniejsze od każdego przybliżenia porządku parzystego.*

409. Też same równości (4) i (5) pokazują nam zarazem i następującą własność ułamka ciągłego:

Każde przybliżenie jest bliższe całkowitej wartości ułamka ciągłego, aniżeli przybliżenie poprzedzające.

W rzeczy samej: druga strona równości (5), paragrafu 408, wyrażającą różnicę pomiędzy x i któremkolwiek przybliżeniem, jest mniejszą co do swojej liczebnej wartości (t. j. bez względu na jej znak) od drugiej strony równości (4), wyrażającej różnicę pomiędzy x i przybliżeniem poprzedzającem. Gdyż y jest większe od 1, i Q_{n-1} mniejsze od Q_n; przeto $\frac{y}{Q_{n-1}} > \frac{1}{Q_n}$, skąd i

$$\frac{y}{Q_{n-1}(Q_n y + Q_{n-1})} > \frac{1}{Q_n(Q_n y + Q_{n-1})}.$$

Jest więc: $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > x - \frac{P_n}{Q_n}$ (po opuszczeniu znaku), czyli: różnica pomiędzy x i przybliżeniem n-tem jest mniejszą liczebnie od różnicy pomiędzy x i przybliżeniem poprzedzającem. Tworząc więc coraz dalsze przybliżenia ułamka ciągłego, zbliżamy się coraz bardziej do jego całkowitej wartości.

Przybliżenia porządku nieparzystego są mniejsze od tej wartości, przybliżenia zaś porządku parzystego większe od niej. Gdybyśmy przeto oddzielnie ugrupowali przybliżenia nieparzyste i oddzielnie parzyste w dwa następujące szeregi:

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_5}{Q_5} \ldots\ldots,$$
$$\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}, \frac{P_6}{Q_6} \ldots\ldots,$$

wtedy ułamki pierwszego szeregu zbliżałyby się coraz bardziej do x rosnąc, wyrazy zaś drugiego szeregu zbliżałyby się ciągle do x malejąc; samo zaś x jest zawsze zawarte pomiędzy dwoma odpowiednimi wyrazami tych dwóch szeregów.

410. *Różnica pomiędzy całkowitą wartością ułamka ciągłego, a jakiemkolwiek przybliżeniem, jest mniejszą liczebnie od ułamka, którego licznikiem jest jedność, a mianownikiem iloczyn z mianownika uważanego przybliżenia i mianownika następującego.*

A także: *różnica pomiędzy całkowitą wartością ułamka ciągłego a jakiemkolwiek przybliżeniem jest mniejszą od ułamka, którego licznikiem jest jedność, a mianownikiem kwadrat z mianownika uważanego przybliżenia.*

W rzeczy samej: jeżeli weźmiemy dwa przybliżenia po sobie następujące $\frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, wtedy całkowita wartość ułamka ciągłego x jest zawarta pomiędzy temi przybliżeniami; a więc różnica pomiędzy x i któremkolwiek z nich jest, liczebnie biorąc (t. j. bez względu na znak), mniejszą od różnicy pomiędzy samemi przybliżeniami, czyli

$$x - \frac{P_n}{Q_n} < \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}.$$

Lecz

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}},$$

gdzie licznik $(-1)^{n+1}$ jest równy ± 1 stosownie do tego, czy $n+1$ jest parzyste czy też nieparzyste.

Zwracając zatem uwagę tylko na liczebną wartość tego licznika, która jest równą 1, mieć będziemy:

$$x - \frac{P_n}{Q_n} < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

W tej nierówności zawiera się pierwsze wyrażenie różnicy pomiędzy wartością całkowitą ułamka ciągłego a któremkolwiek przybliżeniem.

Jeżeli teraz zwrócimy uwagę na to, że ze sposobu tworzenia się przybliżeń:

$$Q_n < Q_{n+1},$$

wtedy, mnożąc obie strony tej nierówności przez Q_n, wypadnie, że i:

$$Q_n^2 < Q_n Q_{n+1}.$$

Ułamek przeto $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$ jest mniejszym od ułamka $\frac{1}{Q_n^2}$, gdyż przy równych licznikach drugi ma mianownik mniejszy. A że: $x - \frac{P_n}{Q_n}$ jest mniejsze od $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$, przeto tembardziej będzie:

$$x - \frac{P_n}{Q_n} < \frac{1}{Q_n^2},$$

i to jest drugim sposobem wyrażenia różnicy pomiędzy x i wartością ułamka ciągłego.

Należy tu jednak zaznaczyć, że pierwszy sposób daje daleko dokładniejszą granicę błędu, jaki popełniamy, biorąc zamiast x którekolwiek przybliżenie, aniżeli drugi; za to drugi sposób jest do rachunku dogodniejszy, gdyż nie wymaga obliczenia wartości mianownika przybliżenia następującego.

411. Wartości przybliżone względem x, otrzymane z ułamków ciągłych przez oznaczenie różnych przybliżeń tegoż ułamka ciągłego, mają jeszcze tę własność, że, przy równym stopniu przybliżenia, są wyrażone w najprostszych liczbach. Mianowicie: można dowieść, że jeżeli jakikolwiek ułamek $\frac{r}{s}$, nie wchodzący do szeregu przybliżeń $\frac{P}{Q}$, bardziej się zbliża do x, aniżeli którekolwiek przybliżenie $\frac{P_n}{Q_n}$, wtedy ułamek ten musi być wyrażony większemi liczbami, aniżeli toż przybliżenie; przynajmniej mianownik tego ułamka musi być większym od mianownika uważanego przybliżenia. Tę własność przybliżeń wyrazić możemy w następujący sposób:

Jeżeli jakikolwiek ułamek $\frac{r}{s}$ zbliża się więcej swoją wartością do x (t. j. do całkowitej wartości ułamka ciągłego), *aniżeli przybliżenie $\frac{P_n}{Q_n}$, wtedy mianownik s tego ułamka musi być większym od mianownika Q_n.*

W rzeczy samej: zauważmy najprzód, że skoro $\frac{r}{s}$ jest więcej zbliżone do x, aniżeli $\frac{P_n}{Q_n}$, to tembardziej $\frac{r}{s}$ będzie więcej zbliżone do x, aniżeli przybliżenie poprzedzające $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Ponieważ zaś x jest zawarte pomiędzy dwoma po sobie następującemi przybliżeniami $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$, a ułamek $\frac{r}{s}$ zbliża się więcej do x, aniżeli każde z nich, przeto ten ułamek $\frac{r}{s}$ musi być także zawartym pomiędzy $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$. Różnica więc pomiędzy ułamkiem $\frac{r}{s}$ i któremkolwiek z przybliżeń $\frac{P}{Q}$, musi być, liczebnie biorąc, mniejszą od różnicy pomiędzy samemi przybliżeniami, t. j. powinno być:

$$\frac{r}{s} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Sprowadzając ułamki na pierwszej stronie powyższej nierówności do jednakowego mianownika, i mając wzgląd na to, czemu się równa różnica pomiędzy dwoma przybliżeniami po sobie następującemi, otrzymamy:

$$\frac{r\,Q_{n-1} - s\,P_{n-1}}{s\,Q_{n-1}} < \frac{1}{Q_n Q_{n-1}}.$$

Lecz ponieważ r, s, P_{n-1} i Q_{n-1} są liczbami całkowitemi, przeto i ilość $r\,Q_{n-1} - s\,P_{n-1}$ musi być także liczbą całkowitą, zatem co najmniej równą jedności. Aby więc ułamek na pierwszej stronie mógł być mniejszym od ułamka na drugiej stronie nierówności napisanej wyżej, powinno być:

$$s\, Q_{n-1} > Q_n\, Q_{n-1},$$
$$\text{skąd:} \quad s > Q_n.$$

I tak jeżeli ułamek $\frac{r}{s}$ jest bliższym całkowitej wartości x ułamka ciągłego, aniżeli przybliżenie $\frac{P_n}{Q_n}$, to przynajmniej mianownik jego s musi być większym od mianownika Q_n. Ze wszystkich zatem wartości ułamkowych przybliżonych do x *w równym stopniu*, ułamek $\frac{P_n}{Q_n}$ jest najprostszym.

412. Ta własność nadaje szczególną cechę i zarazem znaczenie przybliżeniom, które tutaj należy nam wyjaśnić. Wartość przybliżoną pewnej ilości x, której dokładnie nie znamy, lub jej dokładnie wyrazić nie możemy, przedstawiamy zwykle w postaci ułamka. Możnaby sądzić, że im większy jest mianownik tego ułamka, tem wiekszy jest stopień przybliżenia i tem ułamek ten jest bliższym oznaczonej ilości. Bardzo często w rzeczy samej ma to miejsce; że tak jednak nie jest w ogólności, pokazuje następujący przykład. Weźmy pod uwagę trzy ułamki: $\frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}$. Sprowadzając je do jednakowego mianownika, otrzymamy: $\frac{20}{28}, \frac{21}{28}, \frac{24}{28}$; co pokazuje, że ułamek $\frac{3}{4}$ jest zawarty pomiędzy ułamkami $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$. Otóż może się przytrafić, że pewna ilość x, której wartość przybliżoną chcemy oznaczyć, jest zawarta wprawdzie pomiędzy $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$, ale zarazem jest daleko bliższą $\frac{3}{4}$, aniżeli każdego z ułamków skrajnych. W takim razie, wyrażając wartość przybliżoną ilości x za pomocą ułamków z mianownikiem 7, otrzymujemy przybliżenie dalsze od prawdziwej wartości, aniżeli za pomocą ułamka z mianownikiem 4. Może

się więc niekiedy przytrafić, że oznaczając wartość przybliżoną pewnej ilości, otrzymamy przy ułamku z mniejszym mianownikiem wyższy stopień przybliżenia, aniżeli przy ułamku z większym mianownikiem.

Własność przybliżeń ułamka ciągłego, dowiedziona wyżej, pokazuje, że przy użyciu ułamków ciągłych dla oznaczenia wartości przybliżonych, ten przypadek miejsca mieć nie może; każde przybliżenie jest ze wszystkich ułamków, mających ten sam lub mniejszy mianownik, najwięcej zbliżoną wartością x.

413. Gdy wartość przybliżoną jakiejkolwiek ilości niewymiernej mamy już wyrażoną w ułamku dziesiętnym, wtedy możemy tę ilość niewymierną rozwinąć na ułamek ciągły przez rozwinięcie tego ułamka dziesiętnego. W tym celu znajdujemy najprzód dwie wartości przybliżone, pomiędzy któremi dana ilość jest zawartą. Zwykle wartość przybliżona jest podaną w ten sposób, że prawdziwa wartość jest od niej większą. Dodając więc do ostatniej cyfry ułamka dziesiętnego przybliżonego jedność, otrzymamy dwa ułamki, pomiędzy któremi dana ilość jest zawartą. Aby nie wyjść po za te granice, które w ten sposób znajdziemy, należy oba te ułamki dziesiętne zamienić na ułamki ciągłe, i zachować w otrzymanym ułamku ciągłym tylko te ogniwa, które są wspólne w obu rozwinięciach

Objaśnimy to przykładem. Przypuśćmy, że chcemy zamienić na ułamek ciągły stosunek okręgu koła do średnicy, oznaczany w rachunkach zwykle głoską π. Wiemy, że stosunek ten jest niewymierny; Ludolph znalazł przybliżoną wartość tegoż stosunku, wyrażoną w trzydziestu pięciu cyfrach dziesiętnych następnych:

$$3,\ 14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288.$$

Późniejsi matematycy posunęli stopień przybliżenia jeszcze dalej. Rachunek, w którym wszystkie cyfry tutaj przytoczone, są uwzględnione, ciekawi mogą znaleść w pierwszej nocie Lagrange'a do drugiego tomu algebry Eulera (str. 318 i następne). Tutaj ograniczymy się tylko pierwszemi dziesięcioma cyframi dziesiętnemi.

Zachowując przeto te dziesięć cyfr, mamy na wartość przybliżoną π:

$$3,\ 14159\ 26535.$$

Dodając do ostatniej cyfry jedność, znajdziemy, że prawdziwa wartość na π, jest zawartą pomiędzy dwoma ułamkami:

$$\frac{31\,415\,926\,535}{10\,000\,000\,000} \text{ i } \frac{31\,415\,926\,536}{10\,000\,000\,000}.$$

Oba te ułamki zamieniamy sposobem podanym w § 395, na ułamki ciągłe przez postępowanie takie, jakiego używamy przy wynajdywaniu największego wspólnego dzielnika. Z ułamka pierwszego mamy taki szereg ilorazów:

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 6,\ 2,\ 13,\ 3,\ 1,\ 12,\ 3;$$

z drugiego zaś:

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 45,\ 1,\ 1,\ 8.$$

Zachowując tylko ilorazy wspólne tym dwóm ułamkom, otrzymamy takie rozwinięcie ilości π na ułamek ciągły:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

Tworząc przybliżenia tego ułamka podług prawideł podanych poprzednio, znajdziemy następujące wartości przybliżone:

$$\frac{P_1}{Q_1} = 3\,;\quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{22}{7}\,;\quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{333}{106}\,;\quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{355}{113}\,;$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{103993}{33102}\,;\quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{104348}{33215}\,;\quad \frac{P_7}{Q_7} = \frac{208341}{66317}.$$

Każdy z tych ułamków zbliża się do prawdziwej wartości π tak daleko, jak żaden inny ułamek z mianownikiem takim samym lub mniejszym.

Przybliżenie drugie $\frac{22}{7}$ było wartością znalezioną zupełnie inną drogą przez Archimedesa. Wartość ta jest większą od π; różnica pomiędzy π i $\frac{22}{7}$ jest mniejszą, jak wiemy z § 411, od $\frac{1}{7 \times 106} = \frac{1}{742}$.

Ułamek $\frac{355}{113}$ jest stosunkiem Adryana Mecyusza. Jest on również większym od prawdziwej wartości π; ale jest daleko więcej przybliżonym do π, aniżeli liczba Archimedesa, gdyż różnica pomiędzy π i $\frac{355}{113}$ jest mniejszą od $\frac{1}{113 \times 33102}$, to jest od $\frac{1}{3740526}$.

Ułamek $\frac{333}{106}$, zawarty pomiędzy liczbą Archimedesa i liczbą Mecyusza, nie jest wcale prostszym od tego ostatniego, jest jednak daleko mniej dokładnym, gdyż błąd jaki popełniamy, biorąc ten ułamek zamiast π, jest zaledwie mniejszym od $\frac{1}{11978}$. Zresztą można porównać te liczby z sobą w łatwy sposób, zamieniając je na ułamki dziesiętne i porównywając tak otrzymane ułamki dziesiętne z liczbą Ludolpha.

Znajdziemy:

$$\frac{22}{7} = 3{,}142\ldots\,;\quad \frac{333}{106} = 3{,}14150\ldots\,;\quad \frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$$

skąd widzimy, że liczba Archimedesa daje już 3-cią cyfrę błędną, liczba zaś Mecyusza dopiero 7-mą.

414. Pokażemy teraz sposób wynajdywania całkowitej wartości ułamka ciągłego peryodycznego. Okaże się, że ta całkowita wartość jest zawsze jednym z pierwiastków równania stopnia drugiego, którego współczynniki są wymierne. Zaczniemy od przykładów liczebnych.

Przypuśćmy, że mamy ułamek ciągły peryodyczny:

$$x = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \ldots \text{ do nieskończ.}}}}}$$

Oznaczmy przez y całą tę część ułamka ciągłego, która się zaczyna od pierwszego peryodu, to jest uczyńmy:

$$y = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \ldots \text{ do nieskończ.}}}}$$

Wtedy widocznie będzie:

$$x = 5 + \frac{1}{y}\,, \quad y = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{y}}\,,$$

skąd:
$$x = \frac{5y + 1}{y}\;; \quad y = \frac{21y + 2}{10y + 1}\,.$$

Wynajdując wartość na y z równania pierwszego będzie:

$$y = \frac{1}{x - 5}\,;$$

podstawiając ją w równanie drugie, otrzymamy:

$$\frac{1}{x-5} = \frac{\dfrac{21}{x-5} + 2}{\dfrac{10}{x-5} + 1}\,.$$

Mnożąc licznik i mianownik drugiej strony tego równania przez $x - 5$, mieć będziemy:

$$\frac{1}{x-5} = \frac{21 + 2(x-5)}{10 + x - 5} = \frac{11 + 2x}{5 + x}\,,$$

skąd, znosząc mianowniki:

$$11x + 2x^2 - 55 - 10x = 5 + x,$$

po wykonaniu zaś redukcyi:

$$2x^2 = 60,$$

$$\text{czyli:} \quad x^2 = 30.$$

Widzimy z tego, że ostatecznie dla oznaczenia x przyszliśmy do równania stopnia drugiego w najprostszej postaci. Stąd otrzymamy:

$$x = \sqrt{30},$$

wyrażenie, które łatwo sprawdzić przez bezpośrednią zamianę na ułamek ciągły.

W podobny sposób postępować będziemy dla dowiedzenia w ogólności, że ułamek ciągły peryodyczny przedstawia jeden z pierwiastków równania stopnia drugiego, a zatem, że zawsze taki ułamek daje się sprowadzić do wyrażenia pierwiastkowego stopnia drugiego. W tym celu weźmy pod uwagę ułamek ciągły peryodyczny:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ddots + \cfrac{1}{b_m + \cfrac{1}{b_1 + \ldots}}}}}}}}$$

w którym mianowniki $a_1, a_2 \ldots a_n$ przedstawiają część nieperyodyczną, t. j. nie powtarzającą się, mianowniki zaś b_1, $b_2 \ldots b_m$ część peryodyczną, złożoną z m ogniw, powtarzających się, z temiż samemi mianownikami i w tym samym porządku do nieskończoności. Uczyńmy:

$$y = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{b_m + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ldots \text{ do nieskończ.}}}}}}$$

wtedy mieć będziemy:

$$(1)\ x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{y}}}}$$

i także:

$$(2)\ y = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{b_m + \cfrac{1}{y}}}}$$

Jeden i drugi z tych ułamków ciągłych należy zamienić na ułamek zwyczajny, wówczas otrzymamy dwa równania, z których wyrugowawszy y, znajdziemy równanie, zawierające tylko jedną niewiadomą x i służące do ostatecznego znalezienia tejże niewiadomej. Aby w najdogodniejszy sposób wynaleść odpowiednie wyrażenia, weźmy przybliżenie $(n+1)$-sze w ułamku danym i podstawmy w niem y zamiast

b_1, wtedy mieć będziemy całkowitą wartość ułamka ciągłego t. j.:

$$x = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} \quad \ldots\ldots(3)$$

W podobny sposób, biorąc w ułamku (2) przybliżenie $(m+1)$-sze otrzymamy całkowitą wartość ułamka ciągłego (2), to jest y. Będzie zatem:

$$y = \frac{P_m y + P_{m-1}}{Q_m y + Q_{m-1}} \quad \ldots\ldots(4)$$

Oznaczając z równania (3) wartość na y i podstawiając ją w równanie (4), otrzymamy, po zniesieniu mianowników i sprowadzeniu do najprostszej postaci, równanie *stopnia drugiego*, z którego znajdziemy x. Rachunku tego wykonywać tu nie będziemy, gdyż jakkolwiek z ogólnej postaci tego równania można wyprowadzić niektóre ważne wnioski, wszakże robić tego nie będziemy, przechodziłoby to bowiem zakres niniejszego dziełka. W każdym szczególnym przypadku prościej jest bezpośrednio używać równań (3) i (4) w celu znalezienia równania ostatecznego, aniżeli odwoływać się do postaci ogólnej tego równania, o którem mowa.

Rachunki wykonane w tym paragrafie pokazują nam, że każdy ułamek ciągły peryodyczny daje się wyrazić za pomocą jednego pierwiastku równania stopnia drugiego o współczynnikach wymiernych. Lecz pozostawałoby teraz dowieść, że i odwrotnie każda ilość pierwiastkowa niewymierna stopnia drugiego daje się zawsze rozwinąć na ułamek ciągły peryodyczny. Dowodzenie to jednak, podane po raz pierwszy przez Lagrange'a, przechodzi po za obręb tego rozdziału. Nie mniej rozbiór pytania, jaki związek mieć będzie drugi pierwiastek równania stopnia drugiego, powstałego z wyrugowania y z równań (3) i (4) z danym ułamkiem ciągłym peryodycznym, także do naszego zamiaru nie należy.

415. Twierdzenia podane w § 408 dają nam możność obliczenia ilości niewymiernej z taką dokładnością, z jaką tylko chcemy, jeżeli znamy rozwinięcie tej ilości na ułamek ciągły.

W rzeczy samej, jeżeli chcemy pewną ilość niewymierną oznaczyć tak, ażeby błąd nie przewyższał $\frac{1}{m}$, to należy, rozwinąwszy ją na ułamek ciągły, obliczyć takie przybliżenie $\frac{P_n}{Q_n}$, ażeby

$$\frac{1}{Q_n^2} \leqq \frac{1}{m}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

czyli:

$$Q_n^2 \geqq m, \quad Q_n \geqq \sqrt{m}.$$

Ale mianownik każdego przybliżenia, począwszy od trzeciego, jest przynajmniej o jedność większy, aniżeli mianownik przybliżenia poprzedzającego, skąd:

$$Q_n \geqq n - 1,$$

a zatem:

$$n - 1 \geqq \sqrt{m}$$

czyli:

$$n \geqq 1 + \sqrt{m}.$$

Osiągniemy więc w każdym razie żądaną dokładność, jeżeli tylko obliczymy więcej niż $1 + \sqrt{m}$ przybliżeń; w rzeczywistości trzeba obliczyć znacznie mniej przybliżeń, gdyż zwykle różnica pomiędzy jednym mianownikiem Q a następnym wynosi więcej niż 1. Wystarcza zresztą uczynić

$$\frac{1}{Q_n\, Q_{n+1}} \leqq \frac{1}{m}; \quad \ldots \quad (2)$$

dokładność żądana będzie wtedy osiągnięta, chociażby $\frac{1}{Q_n^{\,2}}$ było większe od $\frac{1}{m}$.

Wzoru (2) używamy, jeżeli łatwiej jest obliczyć Q_{n+1} aniżeli Q_n^2.

Przypuśćmy, że chcemy znaleść $\sqrt{2}$ z dokładnością do $\frac{1}{1000}$. Ponieważ $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1}$, więc, używając wzoru podanego w § 403, znajdziemy:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

Przybliżenia kolejne tego ułamka będą:

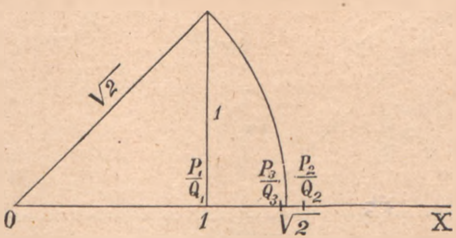
$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{2}, \ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{7}{5}, \ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{17}{12}, \ \frac{P_5}{Q_5} = \frac{41}{29}, \ \frac{P_6}{Q_6} = \frac{99}{70}.$$

Ponieważ $70^2 = 4900 > 1000$, więc szóste przybliżenie wypełnia warunek żądany; ale już piąte przybliżenie wystarcza, gdyż:

$$29 \times 70 = 2030 > 1000.$$

Zamieniając więc $\frac{41}{29}$ na ułamek dziesiętny, dostaniemy trzecią cyfrę dziesiętną dobrą, lub co najwyżej o 1 zamałą, gdyż ułamek ten różni się od $\sqrt{2}$ mniej aniżeli o 0,001. Będzie tym sposobem $\sqrt{2} = 1{,}414$.

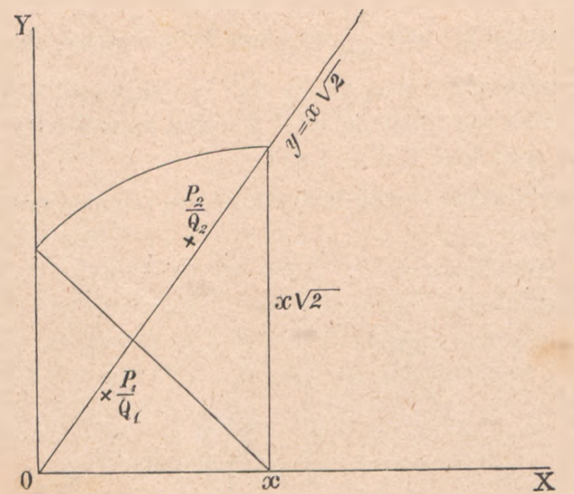
Przybliżenia można uzmysłowić za pomocą rysunku.



Obrawszy dowolnie jednostkę długości, wykreślamy sposobem podanym w § 271 odcinek, którego długość wynosi $\sqrt{2}$, i odkładamy go na prostej OX. Na tejże samej prostej odcinamy długości, wyrażone przez znalezione przybliżenia. Przekonamy się, że punkty odpowiadające przybliżeniom nieparzystym leżą wszystkie z lewej strony punktu $\sqrt{2}$; przybliżenia parzyste znajdą się z prawej strony tegoż punktu. Przytem otrzymywać będziemy punkty, leżące coraz bliżej tego punktu.

Poleca się wykonać ten rysunek na dużym arkuszu papieru milimetrowego, przyjmując za jednostkę długości 250 mm.; można będzie oznaczyć pięć pierwszych przybliżeń. Odległość pomiędzy punktami, oznaczającymi piąte i szóste przybliżenie, wyniosłaby $\frac{250}{2030} < \frac{1}{8}$ mm., co już przechodzi granice dokładności rysunku.

Drugi sposób przedstawienia przybliżeń daje nam tabliczka dzielenia. Ilorazy równe leżą na jednej prostej, przechodzącej przez początek spółrzędnych; ilorazy zbliżone



znajdą się na prostych, leżących blizko siebie, chociażby ich liczniki i mianowniki znacznie się różniły.

Poprowadźmy prostą $y = x\sqrt{2}$ [1]) i, przyjmując liczniki P za rzędne, mianowniki Q za odcięte, oznaczmy punkty, odpowiadające znalezionym przybliżeniom. Będą one leżały coraz bliżej wykreślonej prostej, pod prostą dla przybliżeń nieparzystych, nad prostą dla parzystych. Przy wykonywaniu większego rysunku dogodnie jest przyjąć 2 cm. za jednostkę długości.

PRZYKŁADY XXXIX.

1) Następujące ułamki zwyczajne zamienić na ułamki ciągłe: *a*) $\frac{79}{55}$, *b*) $\frac{445}{612}$, *c*) $\frac{1769}{5537}$.

2) W otrzymanych ułamkach ciągłych w poprzedniem zadaniu oznaczyć wszystkie przybliżenia.

3) Następujące ułamki dziesiętne zamienić na ułamki ciągłe.

a) 1, 2 3 4 5, *b*) 0, 9 7 5 3 1, *c*) przyjmując, że: $\sqrt{2} = 1,4142$.

4) Znaleść wartości następujących ułamków ciągłych:

a) $6 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}$ *b*) $2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7}}}}$

c) $7 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$.

[1]) W tym celu obieramy jakiekolwiek x i budujemy trójkąt, w którym obie przyprostokątne są równe x. Przeciwprostokątna tego trójkąta będzie równa $\sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$; przyjmując ją za rzędną, znajdziemy punkt leżący na szukanej prostej.

5) Następujące ilości pierwiastkowe rozwinąć na ułamki ciągłe:

$a)\ \sqrt{11}$; $\quad b)\ \sqrt{45}$; $\quad c)\ \sqrt{59}$.

6) Znaleść 8-me przybliżenie $\sqrt{31}$.

7) Znaleść wartości następujących ułamków ciągłych peryodycznych:

$$a)\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dots}}}} \qquad b)\ 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\dots}}}}$$

$$c)\ \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dots}}}} \qquad d)\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}$$

8) Następujące wyrażenia pierwiastkowe rozwinąć na ułamki ciągłe:

$$\sqrt{43},\quad \sqrt{61}.$$

9) Dowieść, że jeżeli: $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \frac{P''}{Q''}$ oznaczają trzy jakiekolwiek po sobie następujące przybliżenia, wtedy będzie:

$$(P''-P)\,Q' = (Q''-Q)\,P'.$$

10) Dowieść, że:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{1}{Q_1 Q_2} - \frac{1}{Q_2 Q_3} + \frac{1}{Q_3 Q_4} \dots + \frac{(-1)^n}{Q_{n-1} Q_n}.$$

11) Znaleść wartości następujących ułamków ciągłych, wyrażone bezpośrednio za pomocą a:

$$1)\ a_1+\frac{1}{a_2};\quad 2)\ a_2+\frac{1}{a_1};\quad 3)\ a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}},$$

$$4)\ a_3+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}};\quad 5)\ a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}};\quad 6)\ a_4+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}}}.$$

Wartości otrzymane porównać, mianowicie 1) z 2); 3) z 4); 5) z 6).

12) Poprzednie pytanie uogólnić, mianowicie znaleść związek ogólny pomiędzy wartościami ułamków ciągłych:

$$1)\ a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}} \quad \text{i}\quad 2)\ a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_{n-2}+\cdots\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}}}}}$$

13) Stosunek miesiąca synodycznego, wynoszącego 29,530588 dni, do roku słonecznego zwrotnikowego, mającego dni 365, 242 22, wyrazić w prostszych liczbach.

14) Znaleść równanie, którego pierwiastkiem jest ułamek ciągły:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}},$$

obliczyć wartość tego ułamka z dokładnością do $\frac{1}{1000}$, i oznaczyć znalezione przybliżenia na prostej przy jednostce długości $= 25$ cm., oraz na płaszczyznie, przyjmując P i Q za spółrzędne, przy jednostce długości $= 25$ mm.

XL.

Równania nieoznaczone stopnia pierwszego.

416. Widzieliśmy w nauce o równaniach, że jedna ilość niewiadoma jest w zupełności oznaczoną za pomocą jednego równania, że dwie ilości niewiadome są oznaczone za pomocą dwóch równań, trzy ilości niewiadome za pomocą trzech równań, i t. d. W ogóle mówiąc, oznaczenie pewnej liczby ilości niewiadomych wymaga tylu równań, ile jest niewiadomych.

Gdy więc zadanie jest tego rodzaju, że z jego warunków możemy ułożyć mniej równań, aniżeli jest niewiadomych, wtedy z tych równań oznaczyć wartości niewiadomych nie można.

Gdyby np. były dwa równania, a trzy niewiadome, wówczas z nich moglibyśmy oznaczyć wartości tylko dwóch niewiadomych; na jednę zaś niewiadomą moglibyśmy nadać wartość dowolną. Nadając jakąkolwiek wartość na tę trzecią niewiadomą, otrzymalibyśmy dwa równania, zawierające tylko dwie niewiadome; z nich zatem możnaby było oznaczyć te dwie niewiadome. Lecz ponieważ na trzecią niewiadomą możemy nadać jakąkolwiek wartość, przeto podstawiając zamiast tejże trzeciej niewiadomej inną wartość, znajdziemy, wogóle mówiąc, i inne wartości odpowiednie na dwie pozostałe niewiadome: — dla każdej wartości trzeciej niewiadomej, znajdziemy inny układ wartości dwóch pozostałych niewiadomych. Liczba więc wszystkich rozwiązań takiego układu równań będzie nieskończenie wielką. I taki właśnie układ równań nazwano: *równaniami nieoznaczonemi.* Wogóle równania są *nieoznaczone* wtedy, *gdy liczba równań jest mniejszą od liczby niewiadomych.* Wówczas nadając wartości dowolne na tyle niewiadomych, ile ich jest *więcej* aniżeli równań, otrzymamy równania, z których można oznaczyć pozostałe niewiadome. A że każdemu układowi wartości na te niewiadome, które zależą od naszej woli, odpowiada pewien układ pozostałych niewiadomych, przeto na wszystkie niewiadome otrzymamy nieskończenie wiele odpowiedzi.

Gdyby nie było innych warunków, którym rozwiązania tych równań zadosyć czynić powinny, wtedy nic więcej nad to, co powiedziano wyżej, nie byłoby do dodania. Każde dane zadanie podpadałoby pod ogólną naukę o równaniach bądź to pierwszego, bądź to drugiego, bądź innych stopni, stosownie do stopnia równania, do których toż zadanie doprowadziło. Lecz rozwiązania takich równań poddają się zawsze w tej części algebry, która się niemi zajmuje, jeszcze temu warunkowi, aby one były *liczbami całkowitemi.* Wskutek tego za rozwiązanie równania nieoznaczonego, lub układu równań nieoznaczonych, uważać będziemy tylko *liczby całkowite, zadosyć czyniące danemu równaniu.* I ponieważ rozwiązać równanie nieoznaczone jest to wynaleść te wszystkie liczby całkowite, które mu zadosyć czynią, przeto nauka o rozwiązaniu równań nieoznaczonych nosi odrębną cechę od innych części algebry i właściwie stanowi część osobnej gałęzi matematyki, zwanej: „*teoryą liczb*".

Rozwiązania równań nieoznaczonych ograniczają się niekiedy jeszcze warunkiem tym, że powinny być dodatnie. Ten ostatni warunek ścieśnia tak dalece liczbę rozwiązań, że niekiedy tylko jedno z nich, a nawet czasami żadne nie odpowiada danemu zadaniu.

Równania nieoznaczone, podobnie jak oznaczone, dzielą się na równania stopnia pierwszego, drugiego i t. d. Pod względem liczby niewiadomych, może być albo jedno równanie jakiegokolwiek stopnia z dwiema niewiadomemi, lub z trzema, i t. d., albo też mogą być dwa równania z trzema, czterema i t. d., niewiadomemi; trzy równania z czterema lub większą liczbą niewiadomych, i t. d. Tutaj ograniczymy się tylko równaniami stopnia pierwszego, przedewszystkiem w tym przypadku, gdy dane jest jedno równanie z dwiema niewiadomemi.

417. Jako prosty przykład, objaśniający na czem polegają rozwiązania zadań tego rodzaju, weźmiemy zadanie następujące:

Znaleść dwie liczby, których suma równa się dziesięciu.

Oznaczając jednę z tych liczb przez x drugą zaś przez y, otrzymamy równanie do rozwiązania:

$$x + y = 10.$$

Z tego równania mieć będziemy:

$$x = 10 - y.$$

Dla każdej wartości obranej na y znajdziemy stąd odpowiednią wartość na x; lecz wartości jednej i drugiej niewiadomej są ograniczone tym warunkiem, że mają być tylko całkowite. Możemy więc uczynić:

y równem albo 0, albo 1, albo 2, albo 3, i t. d.

i stąd otrzymamy odpowiednie wartości na x. Czyniąc tak:

$$y = -1,\ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,\ 11,\ 12...$$

znajdziemy: $x = 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,\ 0, -1, -2...$

Wartości więc x i y całkowite, czyniące zadosyć danemu równaniu, są zawarte w tych dwóch szeregach liczb. Z tych szeregów widzimy, jak dalece warunek, aby rozwiązania były nietylko całkowite ale i dodatnie, zmniejsza liczbę tychże rozwiązań, gdyż rozwiązania dodatnie są tylko takie:

$$y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;$$
$$x = 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,\ 0.$$

Jeżelibyśmy zaś z tych rozwiązań wyłączyli 0 i 10, to liczba rozwiązań jeszcze bardziej zmniejszyłaby się i właściwie byłoby tylko pięć odpowiedzi różnych na pytanie, jakie to są dwie liczby, których suma równa się 10?

418. Nie trudno również wynaleść wszystkie rozwiązania równania tego rodzaju:

$$5x + y = 28.$$

Należy tylko rozwiązać je względem tej niewiadomej, przy której współczynnik jest równy jedności. Będzie:

$$y = 28 - 5x.$$

Dla każdej wartości całkowitej na x, wypadnie także całkowita wartość na y. Czyniąc więc:

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3, 4, 5,\ \ 6,\ \ 7,\ \ 8,\ \ 9,\ \ 10...$$

otrzymamy:

$$y = 28, 23, 18, 13, 8, 3, -2, -7, -12, -17, -22...$$

Widoczną jest rzeczą, że i w tem zadaniu liczba rozwiązań dodatnich jest ograniczoną; mianowicie jest ich tylko sześć:

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3, 4, 5,$$
$$y = 28, 23, 18, 13, 8, 3.$$

W sposób podobny do powyższego można zawsze rozwiązać takie równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi, w którem współczynnik przy jednej niewiadomej jest równy jedności, t. j. równania postaci:

$$x + by = k,$$

lub: $x - by = k.$

Wtedy rozwiązując to równanie względem niewiadomej, przy której współczynnik jest jednością (w równaniach przytoczonych wyżej: x), i podstawiając na drugą niewiadomą y kolejno wszystkie liczby całkowite, wynajdziemy i odpowiednie wartości całkowite na x.

Tych bardzo prostych sposobów nie można oczywiście użyć we wszystkich przypadkach do rozwiązania równania ogólnego:

$$ax + by = k,$$

którem się teraz zajmiemy.

419. Możemy przyjąć, że wszystkie trzy liczby a, b i k, będące współczynnikami w napisanem wyżej równaniu, nie mają, razem wzięte, żadnego wspólnego dzielnika: w przeciwnym bowiem razie, dzieląc obie strony tegoż równania przez największy wspólny dzielnik liczb a, b i k, otrzymalibyśmy ostatecznie równanie takie, w którem współczynniki a, b i k, byłyby pierwszemi względem siebie. Gdyby tylko dwa współczynniki a i b miały jakikolwiek wspólny dzielnik, którego nie ma k, w takim razie nie trudno się przekonać, że równanie *nie może być rozwiązane w liczbach całkowitych*. W rzeczy samej: przypuśćmy, że a i b mają wspólny dzielnik d, który w k nie mieści się bez reszty. Wtedy, oznaczając iloraz z podzielenia $\frac{a}{d}$ głoską a', iloraz zaś: $\frac{b}{d}$ głoską b', byłoby $a = a'd$, i $b = b'd$. Podstawiając te wartości za a i b w dane równanie:

$$ax + by = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

byłoby:

$$a'dx + b'dy = k,$$

dzieląc zaś obie strony przez d, wypadłoby:

$$a'x + b'y = \frac{k}{d}.$$

Skoro k nie jest podzielne przez d, wtedy $\frac{k}{d}$ nie jest liczbą całkowitą; żadne więc liczby całkowite, podstawione zamiast x i y w to równanie, nie mogą uczynić pierwszej strony równą drugiej. Wszystkie zatem przypadki, w których dwa współczynniki a i b nie są pierwszemi względem siebie, są wyłączone przy poszukiwaniu rozwiązań całkowitych równania (1). Równanie to przedstawiać nam będzie przykład równania, które rozwiązane w liczbach całkowitych być nie może.

Gdyby którykolwiek ze współczynników a lub b osobno i druga strona równania k miały jakikolwiek wspólny dzielnik d, wtedy równanie mogłoby być sprowadzone do prostszej postaci. Aby pokazać, jak wówczas należy postąpić, przypuśćmy, że np. b i k mają wspólny dzielnik d; tym sposobem będzie: $b = db'$ i $k = dk'$, gdzie b' i k' są liczbami całkowitemi, powstałemi z podzielenia b i k przez d. Uczyńmy $x = dx'$. Gdybyśmy byli w stanie znaleść, czemu się równa x', wtedy

mnożąc każdą z otrzymanych wartości na x' przed d, otrzymamy odpowiednią wartość na x. Podstawmy napisane powyżej wartości na b, k i x w równanie dane (1); mieć będziemy:

$$adx' + b'dy = k'd,$$

z którego, przez podzielenie wszystkich wyrazów przez d, otrzymamy równanie prostsze:

$$ax' + b'y = k.$$

Np. gdyby było równanie:

$$25x + 18y = 102,$$

wtedy, ponieważ 18 i 102 mają wspólny dzielnik 6, uczyńmy: $x = 6x'$, i podstawmy tę wartość za x. Otrzymamy:

$$25 \,.\, 6x' + 18y = 102.$$

Podzieliwszy wszystkie wyrazy przez 6 otrzymamy równanie prostsze, aniżeli dane:

$$25x' + 3y = 17.$$

Wynalazłszy z tego równania x' i y, należy tylko wartości x' pomnożyć przez 6, a znajdziemy odpowiednie wartości na x.

Widzimy z powyższego, że tylko takie równania wypada nam wziąć pod uwagę, w których trzy liczby a, b i k razem, a nadto dwie a i b są pierwszemi względem siebie.

420. Załóżmy więc, że w równaniu:

$$ax + by = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

liczby a i b mają za największy wspólny dzielnik 1; dowiedziemy najprzód, że w tym przypadku rozwiązanie równania (1) jest zawsze możliwe, to jest, że: *gdy a i b są pierwszemi względem siebie, zawsze można znaleść takie liczby całkowite, które równaniu (1) zadosyć czynią.*

Aby tego dowieść, znajdźmy wartość na jednę z niewiadomych równania (1), np. na y, wyrażoną za pomocą drugiej niewiadomej x. Będzie:

$$y = \frac{k - ax}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wystawmy sobie teraz, że za x podstawiamy kolejno wszystkie liczby całkowite, poczynając od 0 i idąc przez liczby dodatnie i ujemne. Oczywiście nie wszystkie te liczby odpowiadać będą równaniu, gdyż nietylko x ma być całkowite, ale także i y. Z pomiędzy więc wszystkich wartości na x, tylko te wybrać nam należy, przy których ułamek na drugiej stronie równania (2) staje się liczbą całkowitą, to jest przy których licznik jest podzielny przez mianownik. Że to jest zawsze możliwe, gdy a i b są pierwszemi względem siebie, wypada z następującego rozważania:

Nie trudno się przekonać, że jeżeli dwie liczby a i b są pierwsze względem siebie, wtedy tworząc szereg liczb:

$$1.a;\ 2.a;\ 3.a;\ \ .\ \ .\ \ (b - 2)\,a;\ (b - 1)\,a \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

nie otrzymamy w nim ani jednej liczby, którąby była podzielną przez b. Gdyż aby którakolwiek z tych liczb, np. ma była podzielną przez b, potrzeba aby m było podzielne przez b, co być nie może; liczba bowiem m jako wzięta z szeregu:

$$1, 2, 3, 4 \quad . \quad . \quad . \quad (b - 2), (b - 1),$$

jest mniejszą od b.

Dzieląc zatem kolejno każdą z liczb szeregu (3) przez b, otrzymamy z każdego dzielenia pewną resztę. Można dowieść, że pomiędzy temi resztami, nie ma dwóch reszt równych, czyli innemi słowami, że *wszystkie one są różne*. W rzeczy samej: wybierzmy z szeregu (3) dwie liczby którekolwiek ma i na, i przypuśćmy, jeżeli to być może, że reszty pozostałe z podzielenia każdej z tych liczb przez b są równe. Oznaczmy tę wspólną resztę przez r, ilorazy zaś przez q i q'. Wtedy byłoby:

$$ma = qb + r; \quad na = q'b + r.$$

Odejmijmy odpowiedniemi stronami te dwie równości, będzie:

$$(m - n)\,a = (q - q')\,b;$$

dzieląc zaś obie strony przez b:

$$\frac{(m - n)\,a}{b} = q - q'.$$

Lecz q i q' są liczbami całkowitemi, więc i ich różnica jest także całkowitą, zatem i pierwsza strona równości powyższej powinna być całkowitą, to jest $(m - n)\,a$ powinno być podzielne przez b. A ponieważ a jest pierwsze względem b, przeto $m - n$ powinno dzielić się bez reszty przez b. Lecz to jest niemożliwe, gdyż każda z liczb m i n, jako wzięta z szeregu: 1, 2, 3... $(b - 2)$ i $(b - 1)$, jest mniejszą od b, więc i ich różnica $m - n$, jako mniejsza od b, nie może być wielokrotną względem b. Z tego więc wypada, że wszystkie reszty, pozostałe z dzielenia liczb szeregu (1) przez b, są *różne*. Każda z tych reszt jest mniejszą od b, liczba ich jest $b - 1$, gdyż szereg (3) zawiera liczb $b - 1$; reszty te przeto są znowuż liczbami:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\ .\ .\ .\ (b - 2), (b - 1);$$

które oczywiście mogą wypadać w bardzo rozmaitym porządku.

Podstawiając zatem kolejno w wyrażenie na drugiej stronie równania (2) zamiast x liczby:

$$(4)\ .\ .\ .\ 0, 1, 2, 3, 4.\ .\ .\ .\ (b - 2) \text{ i } (b - 1),$$

musimy koniecznie pomiędzy temi liczbami natrafić na jednę, *ale tylko na jednę*, taką, która da na resztę z podzielenia ax przez b tęż samę ilość, jaką daje k, będąc podzielone także przez b. Przypuśćmy, że to mieć będzie miejsce wtedy, gdy zamiast x podstawimy pewną liczbę m z szeregu (4). Wówczas oznaczając iloraz z podzielenia am przez b głoską q, a resztę głoską r, otrzymamy:

$$am = bq + r.$$

Ponieważ zaś k, podzielone przez b, daje też samę resztę r, przeto możemy uczynić:

$$k = bq' + r,$$

gdzie q' jest ilorazem z podzielenia k przez b.

Lecz wyrażenie na y, dane przez równanie (2), gdy w niem x uczynimy równem m, zamieni się na takie:

$$y = \frac{k - am}{b}.$$

Podstawiając tutaj zamiast k i am napisane powyżej wartości, będzie:

$$y = \frac{bq' + r - (bq + r)}{b},$$

czyli:

$$y = q' - q,$$

a to jest liczbą całkowitą, gdyż q i q' są liczbami całkowitemi. Widzimy więc z tego, że gdy a i b są pierwszemi względem siebie, można zawsze znaleść taką liczbę, i *to tylko jednę, mniejszą* od b, która podstawiona zamiast x w dane równanie, czyli, co na jedno wychodzi, w równanie (2), uczyni y całkowitem. I to nam pokazuje możliwość rozwiązania danego równania w przypadku rozbieranym.

Podstawienia na x zaczynamy od 0, chcąc objąć i ten przypadek, w którym k jest podzielne bez reszty przez b; gdy jednak to nie ma miejsca, możemy podstawienia te odrazu zacząć od 1.

421. Gdyśmy już znaleźli jednę taką wartość m, która podstawiona zamiast x w równanie (2) daje i wartość na y także całkowitą, nie trudno znaleść i inne rozwiązania całkowite. W tym celu należy tylko zwrócić uwagę na to, że liczba m jest taką, przy której iloczyn am podzielony przez b, daje na resztę r, — ilość taką samę, jak i k podzielone przez b. Lecz jeżeli am podzielona przez b daje na resztę r, wtedy podstawiając zamiast m liczbę $m + b$, otrzymamy iloczyn

$a(m + b) = am + ab$, który podzielony przez b da też samę resztę r, gdyż b mieści się w ab całkowitą liczbę a razy. A zatem wartość na x równa $m + b$, uczyni w równaniu (2) i y całkowitem. Podobnież: dodając do powyższej wartości $m+b$ jeszcze raz b, otrzymamy liczbę $m + 2b$, która podstawiona zamiast x w wyrażenie ax, da iloczyn $a(m + 2b) = am+2ab$ taki, że reszta z podzielenia tego iloczynu przez b będzie znowuż r; a zatem i liczba $m + 2b$, podstawiona w równanie (2), uczyni i y całkowitem. I tak dalej: biorąc zamiast x w ogóle liczbę: $m + pb$, gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, i podstawiając ją w równanie (2), otrzymamy i odpowiednią wartość na y całkowitą.

Podług tego, co było dotąd powiedzianem, nie trudno wynaleść ogólne wyrażenia na x i y, czyniące zadosyć danemu równaniu (1), lub, co na jedno wychodzi, równaniu (2). W rzeczy samej: wartości x, równej m odpowiada wartość na y, równa $q' - q$. Oznaczmy tę ostatnią ilość jedną głoską n. Jeżeli za x podstawimy w równanie (2) $m + b$, wtedy na y otrzymamy:

$$y = \frac{k - a(m + b)}{b} = \frac{k - am - ab}{b},$$

a że: $\quad k = q'b + r; \; am = qb + r;$

przeto:

$$y = \frac{q'b + r - (qb + r) - ab}{b},$$

czyli:

$$y = q' - q - a,$$

i nakoniec:

$$y = n - a.$$

Podobnież: jeżeli na x podstawimy $m + 2b$, wtedy podobny rachunek do powyższego pokaże nam, że:

$$y = n - 2a.$$

I w ogólności, gdy w równaniu (2) uczynimy: $x=m+pb$, otrzymamy na y wartość:

$$y = n - pa.$$

Widzimy z tego, że wartości na x i y są zawarte w dwóch następnych szeregach liczb:

$$x = m,\ m + b,\ m + 2b \ldots . m + pb \ldots .$$
$$y = n,\ \ n - a,\ n - 2a \ldots .\ n - pa \ldots .$$

gdzie odpowiadające sobie wartości na dwie niewiadome znajdują się jedna pod drugą.

Ogólne wyrażenie przeto na liczby całkowite, przedstawiające wartość niewiadomej x jest: $x = m + pb$, a zaś ogólne wyrażenie liczb, przedstawiających wartości na y jest: $y = n - pa$, gdzie m i n są to dwie pierwsze wartości, które zadosyć czynią równaniu (1), a p jakakolwiek liczba całkowita.

Zbyteczną rzeczą jest dodawać, że przyszlibyśmy do tych samych wniosków, gdybyśmy zaczęli rozwiązanie od znalezienia wartości na y.

Gdyby dane równanie było postaci:

$$ax - by = k,$$

wtedy otrzymalibyśmy z niego:

$$y = \frac{ax - k}{b};$$

rozumowanie zupełnie podobne do powyższego pokazałoby nam, że zawsze możemy znaleść na x taką liczbę całkowitą m, mniejszą od b, którą gdy podstawimy w wyrażenie na y, otrzymamy z niego także wartość całkowitą i równą n; i dalej, że taka liczba mniejsza od b jest tylko jedna; nakoniec że wszystkie wartości całkowite, zadosyć czyniące temu równaniu, będą zawarte w wyrażeniach:

$$x = m + pb;\quad y = n + pa.$$

Gdybyśmy jednak zamiast zacząć rozwiązanie od wynalezienia wartości na tę niewiadomą, przy której współczyn-

nik ma znak ujemny (jak tutaj na y), zaczęli od wynalezienia wartości na x, otrzymalibyśmy:

$$x = \frac{k + by}{a},$$

i wtedy należałoby cokolwiek zmienić rozumowanie, dla pokazania, że rozwiązanie w liczbach całkowitych jest i w tym razie zawsze możliwe. Oznaczmy iloraz powstały z podzielenia k przez a głoską s, resztę zaś głoską r. Przeto $r < a$. Podstawiajmy kolejno zamiast y liczby:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots .\ a - 2,\ a - 1;$$

wtedy wiemy, że reszty z podzielenia by przez a wszystkie będą różne, a więc będą wszystkiemi liczbami, mniejszemi od a. Możemy zatem zawsze wynaleść taką liczbę n pomiędzy liczbami, zawartemi w szeregu od 1 do $(a - 1)$, że iloczyn bn, powstały z podstawienia tej liczby zamiast y w wyrazie by, po podzieleniu przez a da resztę r' równą różnicy pomiędzy a i r. Innemi słowami: możemy zawsze wynaleść pomiędzy resztami ostatniemi taką, która będąc dodaną do r da na sumę a. Oznaczmy odpowiedni iloraz z podzielenia bn przez a głoską s'. Wtedy będzie:

$$k = as + r,$$
$$bn = as' + r';$$

skąd:
$$k + bn = a(s + s') + r + r'$$

A że $r + r' = a$, przeto:

$$x = \frac{a(s + s') + a}{a} = s + s' + 1.$$

Dodając a do tej pierwszej wartości na y, to jest do n, otrzymamy nową liczbę $n + a$, która uczyni i x całkowitem i równem $s + s' + 1 + b$. I w ogóle: dodając a powtórzone ilekolwiek razy p do n, otrzymamy taką wartość na y, która uczyni i x całkowitą.

422. Objaśnimy teraz powyższe rozumowanie na kilku przykładach liczebnych.

Weźmy najprzód równanie:

$$8x + 15y = 127.$$

Współczynniki 8 i 15 są pierwszemi względem siebie; rozwiązanie zatem jest możliwe.

Z tego równania otrzymamy:

$$x = \frac{127 - 15y}{8}.$$

Ponieważ przy dzieleniu 127 przez 8 otrzymujemy na resztę 7, przeto powinniśmy odszukać taką liczbę, która podstawiona zamiast y w iloczyn $15y$, dałaby następnie przy dzieleniu przez 8 na resztę także 7. Taką liczbą jest 1. Podstawiając w powyższe wyrażenie na x jedność zamiast y, otrzymamy:

$$x = \frac{127 - 15 \,.\, 1}{8} = \frac{112}{8} = 14.$$

Dwie więc wartości: $y=1$, i $x=14$, podstawione w równanie dane, zadosyć mu czynią. Aby znaleść inne odpowiedzi, zwróćmy uwagę na to, że jeżeli zamiast y podstawimy w iloczynie $15y$ jedność powiększoną o ośm, wtedy otrzymamy iloczyn, który podzielony przez 8 da także na resztę 7, a zatem uczyni $127-15y$ podzielnem przez 8. W rzeczy samej, będzie:

$$x = \frac{127 - 15 \,.\, 9}{8} = -1.$$

Para więc wartości: $x = -1$, $y = 9$, także zadosyć czyni danemu równaniu. Podstawiając dalej zamiast y liczbę $1 + 2 \,.\, 8 = 17$, również uczynimy różnicę $127 - 15y$ podzielną przez 8; i w istocie:

$$x = \frac{127 - 15 \,.\, 17}{8} = \frac{127 - 255}{8} = -\frac{128}{8} = -16;$$

czyli dwie wartości: $x = -16$, $y=17$ zadosyć czynią równaniu danemu. W ogóle podstawiając zamiast y liczbę tej postaci: $1 + 8p$, uczynimy różnicę $127 - 15y$ podzielną przez 8, gdyż będzie:

$$x = \frac{127 - 15\,(1 + 8p)}{8} = \frac{112 - 15 \,.\, 8p}{8} = 14 - 15p.$$

Wszystkie więc liczby całkowite tych postaci:

$$x = 14 - 15\,p,$$
$$y = 1 + 8\,p,$$

gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, będą zadosyć czynić danemu równaniu. Liczby zawarte w powyższych wyrażeniach są takie:

$$\begin{array}{lllllll} p = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \dots \\ x = & 14, & -1, & -16, & -31, & -46, & \dots \\ y = & 1, & 9, & 17, & 25, & 33 \dots & \end{array}$$

Oczywiście oba te szeregi liczb możemy posunąć w lewą stronę, podstawiając za p wartości całkowite ujemne. Różnica pomiędzy następującymi po sobie wyrazami w szeregu pierwszym, przedstawiającym wartości x, jest -15, (t. j. współczynnnik przy y w równaniu danem, wzięty ze znakiem $-$), różnica zaś w drugim, przedstawiającym wartości y, jest 8 (t. j. współczynnik przy x).

Gdyby szło o wynalezienie wartości nie tylko całkowitych, ale i dodatnich, zadosyćczyniących danemu równaniu, wtedy powyższe dwa szeregi pokazują nam, że byłoby tylko jedno rozwiązanie, mianowicie $x = 14$, $y = 1$. We wszystkich innych rozwiązaniach, jedna tylko z liczb jest dodatnią, druga zaś jest ujemną. Gdybyśmy mieli na widoku rozwiązanie np. takiego zagadnienia: kupował ktoś gruszki i jabłka, za jedno jabłko płacił 8 kopiejek, za jednę gruszkę 15 kop.; wydał na całe kupno 1 rs. 27 kop.; ileż kupił jabłek a ile gruszek? wtedy, oznaczając przez x liczbę jabłek, a przez y liczbę gruszek, otrzymalibyśmy równanie:

$$8x + 15y = 127,$$

które, jakkolwiek nieoznaczone, dałoby nam jednę tylko odpowiedź: $x = 14$, $y = 1$, gdyż liczby kupionych gruszek i jabłek muszą być całkowite i dodatnie.

Jako drugi przykład weźmy równanie:

$$9x + 25y = 81.$$

Ponieważ współczynnik przy x i druga strona równania mają wspólny dzielnik 9, przeto, czyniąc $y = 9y'$ i podstawiając w równanie, sprowadzimy je do prostszej postaci. (§ 419.)

$$x + 25y' = 9.$$

Gdybyśmy jednak nie chcieli użyć tego uproszczenia i próbowali rozwiązać bezpośrednio równanie dane, wtedy otrzymalibyśmy:

$$x = \frac{81 - 25y}{9}.$$

Ponieważ reszta pozostała z dzielenia 81 przez 9 jest zero, przeto i za y powinniśmy podstawić taką liczbę, którąby uczyniła iloczyn $25y$ podzielnym przez 9. Taką liczbą będzie najprzód 0, a następnie każda liczba wielokrotna względem 9.

Rozwiązania więc będą:

$$y = 0,\quad 9,\quad 18,\ 27\ \ldots\ 9p.$$
$$x = 9, -16, -41\ \ldots\ 9 - 25p.$$

Trzeci przykład: Dane równanie:

$$19x - 7y = 50.$$

Otrzymujemy najprzód:

$$y = \frac{19x - 50}{7}.$$

Ponieważ 50 podzielone przez 7 daje na resztę 1, przeto szukamy takiej liczby całkowitej, którąby podstawiona zamiast x w iloczynie $19x$ przy dzieleniu przez 7 dała tęż samę resztę. Taką liczbą jest 3; co znajdujemy podstawiając za x kolejno liczby całkowite, zaczynając od jedności. Stąd otrzymamy:

$$y = \frac{19\,.\,3 - 50}{7} = \frac{57 - 50}{7} = 1.$$

Liczby więc 3 i 1 zadosyć czynią danemu równaniu. Rozumowanie, jakiego użyliśmy już kilkakrotnie, pokazuje że rozwiązania będą zawarte w dwóch następnych szeregach liczb:

$$x = 3,\ 10, 17, 24\ \ldots\ 3 + 7p;$$
$$y = 1,\ 20, 39, 58\ \ldots\ 1 + 19p.$$

Gdybyśmy zaczęli rozwiązanie od wynalezienia wartości na x, wtedy otrzymalibyśmy:

$$x = \frac{50 + 7y}{19}.$$

50 podzielone przez 19 daje na iloraz 2 i ną resztę 12. Odszukujemy na y takiej liczby, dla której iloczyn $7y$, podzielony przez 19 dałby na resztę 7, to jest tyle, ile potrzeba dodać do reszty 12 aby otrzymać 19. Taką wartością na y jest 1. Podstawiając tę wartość za y w wyrażenie na x, będzie:

$$x = \frac{50 + 7\,.\,1}{19} = \frac{57}{19} = 3.$$

Znaleźliśmy więc też same rozwiąząnia co i poprzednio.

Czwarty przykład: Mamy równanie:

$$12x - 25y = 0.$$

z niego otrzymujemy:

$$x = \frac{0 + 25y}{12} = \frac{25y}{12}.$$

Widzimy z tego, że $y = 0$ i w ogóle każda liczba podzielna przez 12, podstawiona zamiast y, zadosyć czyni temuż równaniu. Biorąc więc:

$$y = 0,\ 12,\ 24,\ 36\ \ldots.$$

$$x = 0,\ 25,\ 50,\ 75\ \ldots.$$

i w ogóle:

$$y = 12p,$$
$$x = 25p,$$

otrzymamy rozwiązania.

423. Rozumowania i objaśnienia, zawarte w dwóch poprzednich paragrafach, pokazują wprawdzie możliwość rozwiązania równania: $ax + by = k$ w liczbach całkowitych, w tym przypadku, gdy a i b są pierwszemi względem siebie, lecz właściwie nie stanowią sposobu bezpośredniego rozwiązania tegoż równania. Nie możemy bowiem nazwać sposobem rozwiązania równania odszukanie niewiadomej, przez kolejne podstawianie liczb, zaczynając od jedności, podobnie jak takiego sposobu postępowania nie nazwalibyśmy rozwiązaniem i równań oznaczonych. Zajmiemy się teraz wyłożeniem sposobów, prowadzących bezpośrednio albo do wyrażenia w ogólnej postaci liczb całkowitych, zadosyć czyniących danemu równaniu, albo też do wynalezienia dwóch liczb całkowitych, które podstawione zamiast x i y w dane równanie, zadosyć mu czynią. W tym ostatnim przypadku, mając już znalezione dwie takie liczby, łatwo odszukać rozwiązanie ogólne.

Podamy tutaj dwa sposoby rozwiązania równania nieoznaczonego $ax + by = k$; jeden z nich moglibyśmy nazwać: sposobem *dzielenia kolejnego*, drugi zaś za pomocą ułamków ciągłych.

424. Pierwszy z tych sposobów, który prowadzi do wynalezienia ogólnych wyrażeń na niewiadome, objaśnimy najprzód przykładami liczebnemi.

1-szy przykład: Rozwiązać równanie:

$$2x + 3y = 25.$$

W tym celu wynajdźmy z tego równania wartość na tę niewiadomą, przy której współczynnik jest mniejszy, jak tutaj na x; będzie:

$$x = \frac{25 - 3y}{2}.$$

Odłączmy z tego ułamka całkowitą, co nie tylko w tym przypadku, ale zawsze będzie możliwe, gdyż w mianowniku będzie liczba mniejsza od współczynnika przy niewiadomej znajdującej się w liczniku. Otrzymamy:

$$x = 12 - y + \frac{1 - y}{2}.$$

Ponieważ x powinno być całkowitem, przeto na y należy wybrać takie liczby całkowite, któreby uczyniły drugą stronę całkowitą. A że: $12 - y$ jest samo przez się całkowitem przy każdej wartości całkowitej na y, zatem powinniśmy wybrać tylko takie wartości na y, przy których ułamek $\frac{1-y}{2}$ miałby wartość całkowitą, zresztą jakąkolwiek. Czyniąc więc:

$$\frac{1 - y}{2} = p,$$

gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, otrzymamy stąd:

$$y = 1 - 2p;$$

a podstawiając tę wartość w wyrażenie na x, będzie:

$$x = 11 + 3p.$$

Czyniąc:

$$p = \ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\quad 0,\quad 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

otrzymamy:

$$y = \ldots\quad 9,\quad 7,\quad 5,\quad 3,\quad 1,\ -1, \ldots$$
$$x = \ldots -1,\quad 2,\quad 5,\quad 8,\ 11,\ 14, \ldots$$

Wyrażenia $1 - 2p$ i $11 + 3p$ są ogólnemi wartościami na te dwie niewiadome.

2-gi przykład. Rozwiązać równanie:

$$3x - 8y = 43.$$

Wynajdujemy wartość na x, gdyż przy niem współczynnik jest mniejszy; będzie:

$$x = \frac{43 + 8y}{3}.$$

Z ułamka na drugiej stronie wyłączamy całkowitą; ponieważ 43 podzielone przez 3 daje na iloraz 14 i resztę 1, a 8 podzielone przez 3 daje na iloraz 2 i resztę 2, przeto:

$$x = 14 + 2y + \frac{1 + 2y}{3}.$$

Aby wartości na x były całkowite, powinniśmy na y wybrać takie liczby, przy których ułamek $\frac{1 + 2y}{3}$ byłby całkowitym. Uczyńmy więc:

$$\frac{1 + 2y}{3} = p',$$

gdzie p' oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Otrzymamy stąd:

$$y = \frac{3p' - 1}{2} = p' + \frac{p' - 1}{2}.$$

Ta ostatnia równość pokazuje, że aby y było całkowite, powinniśmy na p' tylko takie liczby całkowite wybierać, przy których ułamek $\frac{p' - 1}{2}$ byłby całkowitym. Czyniąc więc jeszcze:

$$\frac{p' - 1}{2} = p,$$

gdzie p jest jakąkolwiek liczbą całkowitą, będzie:

$$p' = 2p + 1.$$

Z tej ostatniej równości widzimy, że p' powinno być postaci $2p + 1$, czyli powinno być zawsze nieparzyste. Podstawiając tę wartość za p' w wyrażenie na y, otrzymamy:

$$y = 1 + 3p;$$

a przez podstawienie wartości na y i na p' w wyrażenie na x, wypadnie:

$$x = 14 + 2(3p + 1) + 2p + 1,$$

czyli: $$x = 17 + 8p.$$

Podstawiając teraz kolejno za p wszystkie liczby całkowite zaczynając od 0 do $+\infty$ i do $-\infty$, otrzymamy wszystkie liczby całkowite, czyniące zadosyć danemu równaniu. Wartości te są zawarte w następującej tablicy:

$$\begin{array}{llllllll} p = \ldots\ldots & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4\ldots\ldots \\ x = \ldots\ldots & & 1, & 9, & 17, & 25, & 33, & 41\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots & & -5, & -2, & 1, & 4, & 7\ldots\ldots & \end{array}$$

Widzimy z tej tablicy, że równanie dane ma nieskończenie wielką liczbę rozwiązań nie tylko całkowitych, ale i dodatnich. Mianowicie wszystkie wartości na x i y, odpowiadające wartościom dodatnim na p, zaczynając od 0, są dodatnie.

3-ci przykład. Rozwiązać równanie:

$$31x + 21y = 1770.$$

Przy rozwiązaniu tego równania zwracamy uwagę czytelnika na pewne uproszczenie, którego często można użyć, i które znacznie ułatwia rachunki, przez sprowadzenie zadania do liczb prostszych.

Zaczynamy, jak zwykle, działanie od wynalezienia wartości na tę niewiadomą, przy której współczynnik jest mniejszy. Będzie:

$$y = \frac{1770 - 31x}{21}.$$

W dalszym ciągu odłączamy całkowitą z tego ułamka; otrzymamy:

$$y = 84 - x + \frac{6 - 10x}{21},$$

czyli:

$$y = 84 - x + \frac{2(3 - 5x)}{21}.$$

Aby wartości całkowitej na x odpowiadała z tego wyrażenia wartość całkowita na y, potrzeba x wybrać takie, przy którem ułamek $\frac{2(3-5x)}{21}$ byłby całkowitym, t. j. przy którem licznik: $2(3 - 5x)$ byłby podzielnym przez 21. A że czynnik 2 jest pierwszym względem 21, przeto potrzeba, aby $3 - 5x$ było podzielne przez 21, t j. aby ułamek

$$\frac{3 - 5x}{21} = p' \text{ (całkowitej).}$$

Przez opuszczenie czynnika 2 w liczniku, pierwszego względem mianownika 21, cały ułamek został uproszczonym i sprowadzonym do liczb mniejszych. Tego rodzaju uproszczenia można zawsze użyć; mianowicie jeżeli przy rozwiązywaniu równania sposobem kolejnego dzielenia, napotkamy taki ułamek, w liczniku którego będzie czynnik pierwszy względem mianownika, to czynnik ten można zawsze opuścić.

Wprowadzając powyższe oznaczenie do wyrażenia na y, będzie:

$$y = 84 - x + 2p'$$

Z równania zaś: $\frac{3-5x}{21} = p'$, otrzymujemy:

$$x = \frac{3 - 21p'}{5},$$

czyli:

$$x = -4p' + \frac{3 - p'}{5}.$$

Aby wartość na x wypadła całkowitą, potrzeba p' tak wybrać, aby ułamek $\frac{3-p'}{5}$ był całkowitym. Czyniąc więc

$$\frac{3 - p'}{5} = p,$$

będzie:

$$x = -4p' + p,$$

i:

$$p' = 3 - 5p.$$

Podstawiając wartość na p' w wyrażenia na x i y, otrzymamy ostatecznie:

$$x = -12 + 21p,$$
$$y = 102 - 31p,$$

jako ogólne wyrażenia na liczby całkowite, zadosyć czyniące danemu równaniu. Czyniąc:

$$p = \ldots. -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots..$$

mieć będziemy:

$$x = \ldots. -54, -33, -12, 9, 30, 51, 72 \ldots..$$
$$y = \ldots. 164, 133, 102, 71, 40, 9, -22 \ldots..$$

dwa szeregi liczb, zawierające wszystkie rozwiązania.

Gdyby szło o rozwiązania tylko dodatnie, wtedy widocznie byłyby trzy odpowiedzi: $x = 9, 30, 51$; $y = 71, 40, 9$.

4-ty przykład: Rozwiązać równanie:

$$12x + 17y = 479.$$

Wynajdując wartość na x, otrzymamy:

$$x = \frac{479 - 17y}{12} = 39 - y + \frac{11 - 5y}{12}.$$

Uczyńmy dalej: $\frac{11-5y}{12} = p'$,

będzie:

$$x = 39 - y + p';$$

i nadto:

$$y = \frac{11 - 12p'}{5} = 2 - 2p' + \frac{1 - 2p'}{5}.$$

Czyniąc znowuż: $\frac{1-2p'}{5}=p''$,

otrzymamy:

$$y=2-2p'+p'',$$

i: $$p'=\frac{1-5p''}{2}=-2p''+\frac{1-p''}{2}.$$

Ponieważ $\frac{1-p''}{2}$ ma być całkowite, przeto:

$$\frac{1-p''}{2}=p,$$

gdzie p jest jakąkolwiek całkowitą; skąd:

$$p''=1-2p.$$

Podstawiając tę wartość w p', y i x, otrzymamy ostatecznie ilości x i y, wyrażone bezpośrednio za pomocą p. Wyrażenia te będą:

$$x=30+17p,$$
$$y=7-12p.$$

Czyniąc p kolejno równe wszystkim liczbom całkowitym, otrzymamy wartości odpowiednie na x i y.

$$p=\ldots\ldots -2, -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ldots$$
$$x=\ldots\ldots -4, \ 13, \ 30, \ 47, \ 64, \ldots$$
$$y=\ldots\ldots \ 31, \ 19, \ 7, -5, -17\ldots\ldots$$

Można się łatwo przekonać, że wartości znalezione na x i y zadosyć czynią danemu równaniu przy wszystkich znaczeniach na p. Należy tylko podstawić te wartości w równanie: $12x+17y=479$. Otrzymamy:

$$12(30+17p)+17(7-12p)=$$
$$=360+12.17p+119-12.17p=479.$$

Ponieważ wyrazy zawierające p znoszą się same przez się na pierwszej stronie równości, przeto wartości na x i y czynią zadosyć danemu równaniu przy jakiemkolwiek p.

Z szeregów liczb, napisanych wyżej, widzimy, że dane równanie ma tylko dwa rozwiązania całkowite i zarazem dodatnie, mianowicie: albo $x=13$, $y=19$; albo też: $x=30$, $y=7$.

425. Przykłady rozwiązane w paragrafie poprzednim objaśniają dostatecznie, na czem polega sposób wynalezienia ogólnych wyrażeń całkowitych na x i y. Możemy sposób ten opisać w ogólności tak:

Niech będzie dane równanie:

$$ax+by=k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Gdyby współczynnik przy jednej z niewiadomych był równym jedności, wtedy odrazu rozwiązalibyśmy je, wynajdując wartość na tęż niewiadomą i podstawiając kolejno za drugą niewiadomą wszystkie liczby całkowite. Należy nam przedewszystkiem rozebrać ten przypadek, w którym a i b są różne od 1. Wiemy już z poprzedniego, że rozwiązanie w liczbach całkowitych jest tylko wtedy możliwe, gdy a i b są pierwsze względem siebie.

Niech więc będą a i b różne od 1 i pierwsze względem siebie; przypuśćmy nadto, że $b<a$. Wynajdźmy z równania (1) wartość na tę niewiadomą, przy której współczynnik jest mniejszy; jak tutaj, podług naszego przypuszczenia, na y. Będzie:

$$y=\frac{k-ax}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Podzielmy a przez b; oznaczmy iloraz z tego dzielenia przez q a resztę przez r. Gdyby k było także większe od b, wtedy podzielmy k przez b i oznaczmy iloraz przez m, a resztę przez n. Wtedy:

$$a=bq+r; \quad k=bm+n.$$

Podstawiając te wartości za a i k w równanie (2), otrzymamy:

$$y=\frac{bm+n-(bq+r)x}{b}=\frac{bm-bqx}{b}+\frac{n-rx}{b},$$

czyli:

$$y = m - qx + \frac{n - rx}{b}.$$

Podług założenia szukamy na x i y wartości całkowitych. Lecz nadając na x jakąkolwiek wartość całkowitą, otrzymamy na część $m - qx$ wartość także całkowitą; aby więc i y było całkowite, potrzeba wynaleść takie wartości na x, przy których ułamek $\frac{n - rx}{b}$ byłby całkowitym. Dla tego też czynimy:

$$\frac{n - rx}{b} = p',$$

oznaczając przez p' jakąkolwiek liczbę całkowitą. Z tej ostatniej równości wypada:

$$rx + bp' = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Całe zadanie sprowadza się więc właściwie do rozwiązania równania (3), prostszego od równania danego, gdyż b, które było mniejszem od a, jest tutaj współczynnikiem większym, a n nie jest większe od k.

Gdyby r było równem 1, wtedy zadanie byłoby już rozwiązane. Jeżeli $r > 1$, wówczas znajdźmy znowuż z tego równania wartość na x, przy którem współczynnik jest mniejszy od b; będzie:

$$x = \frac{n - bp'}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Oznaczając iloraz, powstały z podzielenia b przez r, głoską q' i resztę głoską r'; iloraz zaś z podzielenia n przez r głoską m', a resztę głoską n', mieć będziemy jak wyżej:

$$x = \frac{m'r + n' - (q'r + r')\,p'}{r} = \frac{m'r - q'rp' + n' - r'p'}{r},$$

czyli: $$x = m' - q'p' + \frac{n' - r'p'}{r}.$$

Ponieważ zaś x i p' mają być całkowite, przeto tę ostatnią liczbę należy tak wybrać, aby wyrażenie $\frac{n' - r'p'}{r}$ było liczbą całkowitą. W tym celu uczyńmy:

$$\frac{n' - r'p'}{r} = p'',$$

gdzie p'' oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Stąd:

$$r'p' + rp'' = n' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

i zadanie znowuż jest sprowadzone do rozwiązania równania prostszego, niż poprzednie, gdyż $r' < r$. Gdyby tutaj wypadło $r' = 1$, wtedy rozwiązanie byłoby skończone. Lecz jeżeli $r' > 1$, wówczas znowuż wynajdźmy wartość na p' (współczynnik bowiem przy niem jest mniejszy); będzie:

$$p' = \frac{n' - rp''}{r'},$$

i odłączmy całkowitą z tego ułamka, co zawsze da się zrobić, gdyż $r > r'$. Wprowadzając też same oznaczenia co i poprzednio, t. j. oznaczając przez m'' i n'' iloraz i resztę z podzielenia n' przez r', a przez q'' i r'' iloraz i resztę z podzielenia r przez r', otrzymamy:

$$p' = m'' - q''\,p'' + \frac{n'' - r''\,p''}{r'}.$$

Czynimy znowuż:

$$\frac{n'' - r''\,p''}{r'} = p''',$$

skąd wypada równanie:

$$r''\,p'' + r'\,p''' = n'', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

którem kończyłoby się rozwiązanie, gdyby r'' było równem 1. Gdyby ono było różnem od 1, wtedy dalej postępowalibyśmy tak samo jak poprzednio dotąd, dopóki jedna z reszt: r, r', r''... niewypadłaby równą 1. To nastąpić koniecznie musi; gdyż, podług założenia, liczby a i b są pierwszemi względem siebie, a reszty: r, r', r'' i t. d. są otrzymane z takiego działania, jakie wykonalibyśmy, gdybyśmy chcieli znaleść dzieleniem największy wspólny dzielnik dla a i b. Przypuśćmy więc, że już reszta r'' jest równą 1; co możemy uczynić, liczba działań bowiem niema tutaj żadnego wyływu na bieg rozumowania. Wtedy z równania (6) otrzymamy:

$$p'' = n'' - r'p,$$

gdzie znaczki nad p''' opuściliśmy, jako już dalej niepotrzebne. Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę wyrażenia poprzednio otrzymane:

$$\begin{aligned} y &= m - qx + p', \\ x &= m' - q'p' + p'', \\ p' &= m'' - q''p'' + p, \end{aligned}$$

i: $$p'' = n'' - r'p,$$

i podstawimy wartość na p'' w wyrażenie na p', następnie wartości na p' i p'' w wyrażenie na x i nakoniec wartości na x i p' w wyrażenie na y, wtedy wyrazimy obie wartości na x i y za pomocą jednej ilości ostatniej p, która oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Rachunku tego nie wykonywamy tutaj, gdyż nie prowadzi on do wzorów, mających znaczenie praktyczne. Najlepiej w każdym przypadku sposobem wskazanym postępować tak, jak robiliśmy w przykładach rozwiązanych w poprzednim paragrafie.

426. Zastosujemy jeszcze zasady podane wyżej do rozwiązania kilku zagadnień.

1-sze. *Liczbę 100 podzielić na takie dwie części, aby jedna z nich podzielona przez 5 dała na resztę 2, a druga podzielona przez 7 dała na resztę 4.*

Ponieważ pierwsza z tych części, będąc podzielona przez 5, ma dać w reszcie 2, przeto ta pierwsza część powinna być tej postaci: $5x + 2$, gdzie x oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. I dalej: ponieważ druga część, będąc podzielona przez 7, ma dać na resztę 4, przeto musi być ona na tej postaci: $7y + 4$. Obie te części razem wzięte powinny stanowić 100. Będzie więc równanie:

$$5x + 2 + 7y + 4 = 100, \text{ czyli:}$$
$$5x + 7y = 94.$$

Następującym rachunkiem, który tu wykonywamy, bez objaśnień, znajdujemy ostateczne wyrażenia na x i y:

$$\begin{aligned} x = \frac{94 - 7y}{5} &= 18 - y + \frac{4 - 2y}{5} \\ &= 18 - y + \frac{2(2-y)}{5}; \end{aligned}$$

$$\frac{2-y}{5} = p; \quad y = 2 - 5p,$$

$$x = 16 + 7p.$$

Tym sposobem ostateczne wyrażenia są:

$$x = 16 + 7p; \quad y = 2 - 5p.$$

Czyniąc:	$p = \ldots. -3,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2 \ldots.$
otrzymamy:	$x = \ldots. -5,$	$2,$	$9,$	$16,$	$23,$	$30 \ldots.$
	$y = \ldots.. 17,$	$12,$	$7,$	$2,$	$-3,$	$-8 \ldots.$

Ponieważ natura pytania wymaga oczywiście odpowiedzi nietylko całkowitych, ale i dodatnich, przeto powinniśmy z tych wartości na x i y te tylko wybrać, które dają dwie części szukane dodatnie, a zatem wartości tylko dodatnie na x i y. Tych wartości jest trzy:

$$x = 2, 9, 16;$$
$$y = 12, 7, 2.$$

Przy pierwszej z nich $x = 2$, $y = 12$, część pierwsza szukana: $5x + 2 = 12$, część druga $7y + 4 = 88$; przy drugiej: $x = 9$, $y = 7$, część pierwsza: $5x + 2 = 47$, część druga: $7y + 4 = 53$; nakoniec przy trzeciej: $x = 16$, $y = 2$, część pierwsza: $5x + 2 = 82$, część druga: $7y + 4 = 18$.

427. *Zagadnienie.* Handlarz kupował konie i woły: za konia płacił 141 rubli, za wołu zaś 99 rb.; kupił tyle koni i tyle wołów, że za woły zapłacił o 18 rb. więcej, aniżeli za konie. Ileż kupił koni a ile wołów?

Oznaczmy liczbę kupionych wołów głoską x, a liczbę kupionych koni głoską y. Wtedy za konie zapłacił $141y$, a za woły $99x$. Ponieważ woły kosztowały o 18 rb. więcej, aniżeli konie, przeto:

$$99x = 141y + 18, \quad \text{czyli}$$

$$99x - 141y = 18. \qquad (1)$$

W celu rozwiązania tego równania, zauważmy najprzód, że wszystkie wyrazy jego mogą być podzielone przez 3; wykonajmy to dzielenie, przez co równanie się upraszcza. Będzie:

$$33x - 47y = 6.$$

Ponieważ 33 i 6 mają wspólny czynnik 3, przeto równanie można dalej uprościć (§ 419) czyniąc:

$$y = 3u, \qquad (2)$$

gdzie u jest nową niewiadomą. Podstawiając tę wartość w równanie, otrzymamy:

$$33x - 47 \,.\, 3u = 6;$$

dzieląc teraz całe równanie przez 3, będzie:

$$11x - 47u = 2. \qquad (3)$$

Z tego ostatniego równania otrzymujemy najprzód:

$$x = \frac{2 + 47u}{11} = 4u + \frac{2 + 3u}{11};$$

czyniąc zaś:

$$\frac{2 + 3u}{11} = p',$$

mamy:

$$x = 4u + p',$$

$$u = \frac{11p' - 2}{3} = 3p' + \frac{2p' - 2}{3},$$

czyli:

$$u = 3p' + \frac{2(p' - 1)}{3}.$$

Ponieważ 2 jest pierwsze względem 3, przeto czynimy:

$$\frac{p' - 1}{3} = p, \text{ skąd:}$$

$$u = 3p' + 2p,$$

i dalej:

$$p' = 3p + 1.$$

Przez kolejne podstawiania, znajdziemy ostatecznie:

$$u = 11p + 3,$$

$$x = 47p + 13.$$

Podstawiając zaś tę wartość na u w równanie (2) otrzymamy:

$$y = 33p + 9.$$

Czyniąc teraz w tych wyrażeniach kolejno:

$$p = 0, \; 1, \; 2, \; 3, \ldots.$$

otrzymamy wartości na x i y:

$$x = 13, \; 60, \; 107, \; 154 \ldots..$$

$$y = 9, \; 42, \; 75, \; 108 \ldots..$$

Oczywistą jest rzeczą, że zagadnienie może mieć tylko odpowiedzi dodatnie; wyrażenia, znalezione wyżej pokazują, że odpowiedzi tych jest nieskończenie wiele, — najmniejsza z nich: kupiono wołów 13, koni 9.

428. *Zagadnienie.* Znaleść taki ułamek, któryby odjęty od ułamka $\frac{355}{113}$ dał na różnicę ułamek, mający za licznik 1 a za mianownik iloczyn z mianowników tych dwóch ułamków.

Oznaczając licznik szukanego ułamka przez x, a mianownik przez y, mieć będziemy równanie:

$$\frac{355}{113} - \frac{x}{y} = \frac{1}{113y}. \qquad (1)$$

Zniósłszy mianowniki otrzymamy:

$$355y - 113x = 1.$$

Rozwiązując to ostatnie równanie sposobem wielokrotnie wskazanym, znajdziemy następujące wartości na x i y:

$$x = 355p - 22,$$
$$y = 113p - 7.$$

Podstawiając za p jakiekolwiek liczby całkowite, dodatnie lub ujemne, otrzymamy nieskończoną liczbę wartości na x i y całkowitych, z których biorąc pierwszą za licznik, a odpowiednią drugą za mianownik, mieć będziemy nieskończoną liczbę ułamków, zadosyć czyniących żądanym warunkom. I tak:

gdy:	$p = \ldots\ldots$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2, \ldots\ldots$
wtedy:	$x = \ldots\ldots$	$-732,$	$-377,$	$-22,$	$333,$	$688 \ldots\ldots$
	$y = \ldots\ldots$	$-233,$	$-120,$	$-7,$	$106,$	$219 \ldots\ldots$

skąd:

$$\frac{x}{y} = \ldots\ldots \frac{732}{233}, \frac{377}{120}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{688}{219} \ldots\ldots$$

Zwracamy uwagę czytelnika na trzeci i czwarty z napisanych ułamków: należy porównać te wypadki z ułamkami w § 413.

429. Widzieliśmy w § 421, *że jeżeli mamy jednę parę wartości, które, podstawione w równanie dane zamiast x i y, sprawdzają je, wtedy możemy odrazu napisać ogólne wyrażenia na obie niewiadome, a tem samem wynaleść wszystkie rozwiązania.*

Jakkolwiek zasada ta wypływa bezpośrednio z rozumowań w paragrafie powołanym wyżej, to wszakże ze względu na jej ważność, dowiedziemy jej tutaj inną drogą.

Przypuśćmy więc, że mamy już dwie liczby A i B, które podstawione zamiast x i y odpowiednio, zadosyć czynią równaniu:

$$ax + by = k \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1).$$

Aby dowieść, że stąd możemy natychmiast napisać ogólne wyrażenia na x i y, zauważmy, że podług założenia mamy najprzód:

$$a.A + bB = k.$$

Odejmijmy tę równość od równania:

$$ax + by = k,$$

otrzymamy:

$$ax - aA + by - bB = 0,$$

czyli:

$$ax - aA = bB - by;$$

wyłączając zaś na pierwszej stronie a, a na drugiej b za nawias, będzie:

$$a\,(x - A) = b\,(B - y),$$

skąd:

$$x - A = \frac{b\,(B - y)}{a} \qquad (2)$$

Ponieważ A jest liczbą całkowitą i x ma być także całkowite, przeto i druga strona powinna być całkowitą, czyli: $b\,(B - y)$ powinno być podzielne przez a. A że b jest pierwszem względem a, przeto $B - y$ samo przez się powinno być podzielne przez a. Należy zatem y wybrać takie, aby było:

$$\frac{B - y}{a} = p, \qquad (3)$$

gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą.

Podstawiając tę wartość w równanie (2), otrzymamy:

$$x - A = bp,$$

skąd:

$$x = A + bp. \qquad (4)$$

Z równania zaś (3) znajdziemy:

$$y = B - ap. \qquad (5)$$

Czyniąc tutaj kolejno:

$$p = \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

mieć będziemy:

$$x = \ldots\ldots A - 2b,\ A - b,\ A,\ A + b,\ A + 2b,\ A + 3b \ldots$$
$$y = \ldots\ldots B + 2a,\ B + a,\ B,\ B - a,\ B - 2a,\ B - 3a \ldots$$

A to dowodzi twierdzenia podanego wyżej.

Gdybyśmy toż samo rozumowanie zastosowali do równania:

$$ax - by = k,$$

otrzymalibyśmy na wypadki ostateczne:

$$\left.\begin{aligned} x &= A + bp, \\ y &= B + ap, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

skąd rozwiązania wszystkie byłyby zawarte w szeregach następujących:

$$\begin{array}{lllllll} p = \ldots\ldots & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3\ldots\ldots \\ x = \ldots\ldots & A-2b, & A-b, & A, & A+b, & A+2b, & A+3b\ldots \\ y = \ldots\ldots & B-2a, & B-a, & B, & B+a, & B+2a, & B+3a\ldots \end{array}$$

430. W tym przypadku, w którym zagadnienie rozwiązywane może mieć tylko odpowiedzi dodatnie, należy we wzorach (4), (5) i (6) poprzedniego paragrafu wybrać tylko takie wartości na p, przy których x i y wypadłyby dodatnie. Przy jakich znaczeniach na p, x i y będą dodatnie można znaleść rozumowaniem następującem:

1-sze. Gdy dane równanie jest:

$$ax + by = k,$$

w którem a i b są dodatniemi, wtedy z nich wypada:

$$x = A + bp,$$
$$y = B - ap.$$

Wyłączając na drugiej stronie pierwszej równości b, na drugiej stronie drugiej równości a za nawias, będzie:

$$x = b\left(p - \frac{-A}{b}\right),$$

$$y = a\left(\frac{B}{a} - p\right).$$

Te ostatnie wyrażenia pokazują, że aby wartość na x była dodatnią, należy p wybrać takie aby było:

$$p > -\frac{A}{b}, \text{ (gdyż } b \text{ jest dodatnie).}$$

Również, aby wartość na y była dodatnią, należy p wybrać takie, aby było:

$$p < \frac{B}{a}.$$

Tym sposobem oznaczyliśmy dwie granice, pomiędzy któremi p powinno być zawarte, aby i x i y wypadły dodatnie. Stąd się pokazuje, że liczba rozwiązań dodatnich w tym przypadku będzie ograniczoną; nawet bazdzo łatwo może się przytrafić, że nie będzie ani jednego rozwiązania dodatniego.

2-ie. Gdy dane równanie jest:

$$ax - by = k,$$

wtedy wartości na x i y są dane wzorami:

$$x = A + bp,$$
$$y = B + ap.$$

Wartości te można przedstawić w podobny sposób, jak w poprzednim przypadku, tak:

$$x = b\left(p - \frac{-A}{b}\right),$$

$$y = a\left(p - \frac{-B}{a}\right).$$

Aby x było dodatnie, potrzeba aby było:

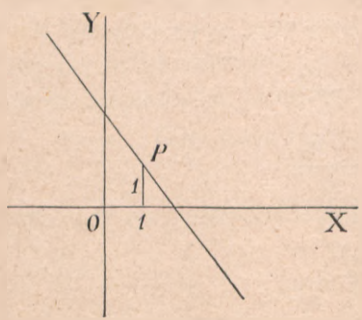
$$p > -\frac{A}{b};$$

aby znowuż y było dodatnie, należy wybrać takie p, aby:

$$p > -\frac{B}{a}.$$

Biorąc więc p większe od większej z tych liczb: $-\frac{A}{b}$ i $-\frac{B}{a}$, otrzymywać będziemy wartości na x i y dodatnie. Liczba zatem rozwiązań dodatnich będzie w tym przypadku nieograniczoną.

431. Równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi można zawsze przedstawić za pomocą linii prostej (§ 384). Wynajdując rozwiązania całkowite takiego równania, oznaczamy na prostej takie punkty, których obie spółrzędne są liczbami całkowitemi. Jeżeli nadto wymagamy, aby rozwiązania były dodatnie, wtedy uwzględniamy tylko takie punkty, które leżą w ćwiartce płaszczyzny, zawartej między dodatniemi częściami obu osi. Liczba rozwiązań dodatnich może więc być tylko wtedy nieograniczona, kiedy część linii, leżąca w tej ćwiartce, jest nieograniczona, t. j. jeżeli prosta przecina jednę oś w jej części dodatniej, drugą w ujemnej. Liczba rozwiązań dodatnich jest napewno ograniczona, jeżeli prosta przecina obie osi w ich częściach dodatnich, lub obie w ujemnych; w tym ostatnim przypadku niema ani jednego rozwiązania dodatniego.



Naprzykład równanie:

$$3x + 2y = 5,$$

jak to łatwo znaleść podług § 430, ma tylko jedno rozwiązanie dodatnie: $x = 1$, $y = 1$, z czego można wnosić, że prosta, przedstawiająca to równanie, ma tylko jeden taki punkt P, w którym obie spółrzędne są całkowite i dodatnie.

Podobnie znajdziemy, że prosta:

$$2y - x = 2$$

ma nieskończony szereg takich punktów. Ta prosta jest wykreślona na str. 315. Druga prosta, tamże rozpatrywana:

$$y = -2x - \frac{3}{2},$$

czyli:

$$2y + 4x = -3,$$

niema wcale punktów, dla których obie spółrzędne byłyby dodatnie; ale ona niema także punktów, dla których obie spółrzędne byłyby całkowite, ponieważ współczynniki przy x i y mają czynnik wspólny 2, którego niema wyraz stały -3 (por. § 419).

432. Własności przybliżeń ułamków ciągłych podają nam łatwy sposób wynalezienia jednej pary liczb całkowitych, które podstawione w dane równanie zamiast x i y, zadosyć mu czynią. Wiemy zaś z paragrafu 429, że gdy jednę taką parę liczb całkowitych znamy, wtedy możemy odrazu napisać wyrażenia ogólne, i tym sposobem wynaleść wszystkie rozwiązania. Pokażemy teraz to zastosowanie teoryi ułamków ciągłych do rozwiązania równania nieoznaczonego:

$$ax + by = k \;.\;.\;.\;. (1).$$

W tym celu rozwińmy ułamek $\frac{a}{b}$ na ułamek ciągły, i wynajdźmy wszystkie przybliżenia tegoż ułamka ciągłego. Przedostatnie przybliżenie niech będzie $\frac{P}{Q}$, ostatnie zaś będzie oczywiście równe danemu ułamkowi zwyczajnemu $\frac{a}{b}$. Znajdźmy następnie różnicę pomiędzy $\frac{a}{b}$ (czyli przybliżeniem ostatniem) i $\frac{P}{Q}$, t. j.:

$$\frac{a}{b} - \frac{P}{Q}.$$

Podług własności przybliżeń, dowiedzionej w § 406, różnica ta jest równa ułamkowi, którego licznikiem jest + lub — jedność, a mianownikiem iloczyn z mianowników tychże przybliżeń. Będzie więc:

$$\frac{a}{b} - \frac{P}{Q} = \frac{\pm 1}{bQ},$$

czyli znosząc mianowniki:

$$a \,.\, Q - b \,.\, P = \pm 1.$$

Pomnóżmy teraz obie strony tego równania przez k, *wzięte z takim znakiem, aby po wykonaniu mnożenia wypadło na drugiej stronie k z takim znakiem, z jakim wchodzi do drugiej strony równania* (1).

Zrobiwszy to otrzymamy:

$$a \,.\, Qk - b \,.\, Pk = k.$$

(Znaki opuszczamy tutaj, dla nierozróżniania zbyt wielu przypadków).

Tę ostatnią równość możemy tak napisać:

$$a \,.\, (Qk) + b \,.\, (-Pk) = k.$$

Porywnywając ją z równaniem (1), widzimy, że toż równanie zostaje sprawdzone przez podstawienie w niem zamiast x i y odpowiednio: Qk i $-Pk$. Dwie te liczby przeto stanowią pierwszą parę rozwiązań, i możemy przyjąć, że:

$$A = Qk; \quad B = -Pk.$$

Mając zaś te wartości, możemy wynaleść wszystkie rozwiązania.

433. Przykład. Weźmy równanie, rozwiązane już w § 424, przykład 4-ty:

$$12x + 17y = 479.$$

Ułamek $\frac{12}{17}$ zamieńmy na ułamek ciągły; będzie:

$$\frac{12}{17} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Znajdźmy wszystkie przybliżenia; otrzymamy:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{12}{17}.$$

Weźmy teraz różnicę pomiędzy całkowitą wartością ułamka ciągłego i przedostatniem przybliżeniem; będzie:

$$\frac{12}{17} - \frac{5}{7} = \frac{12 \,.\, 7 - 17 \,.\, 5}{17 \,.\, 7} = \frac{84 - 85}{17 \,.\, 7} = \frac{-1}{17 \,.\, 7},$$

skąd:

$$12 \,.\, 7 - 17 \,.\, 5 = -1.$$

Pomnóżmy obie strony tej ostatniej równości przez -479; otrzymamy:

$$12 \,.\, (-7 \,.\, 479) + 17 \,.\, (5 \,.\, 479) = 479.$$

Porównywając tę równość z danem równaniem widzimy, że liczby: -7×479 i 5×479, podstawione zamiast x i y, zadosyć mu czynią. Możemy więc przyjąć, że:

$$A = -7 \times 479 = -3353, \text{ i } B = 5 \times 479 = 2395.$$

Ogólne wyrażenia zatem na x i y będą:

$$x = 17p - 3353; \quad y = -12p + 2395.$$

Podstawiając za p kolejno $0, 1, 2 \ldots . -1, -2, \ldots .$ otrzymamy wszystkie rozwiązania.

Porównywając wyrażenia otrzymane obecnie z wyrażeniami na x i y, znalezionemi w § 424, wydaje się, że wartości, jakie wyrażenia te przedstawiają, są różne. Czyniąc tu bowiem:

	$p = \ldots .$	$0,$	$1,$	$2,$	$3, \ldots .$
otrzymujemy:	$x = \ldots .$	$-3353,$	$-3336, \ldots .$		
	$y = \ldots .$	$2395,$	$2383, \ldots .$		

Lecz różnica ta jest tylko pozorną, gdyż dosyć jest podstawić za p liczbę dostatecznie wielką w wyrażeniach: $x = 17p - 3353$, i $y = -12p + 2395$, aby otrzymać też same wyrazy, które są napisane jako rozwiązania równania danego w § 424. Mianowicie: jeżeli uczynimy $p = 197$, wtedy otrzymamy: $x = -4$, $y = 31$; to jest też same liczby, od których zaczęliśmy pisać rozwiązania w wymienionym tyle razy paragrafie. Łatwo wyrażenia $x = 17p - 3353$ i $y = -12p + 2395$ przerobić na wyrażenia: $x = 30 + 17p$, i $y =$

$7 - 12p$. W tym celu należy tylko zwrócić uwagę na to, że: $3353 = 17 \cdot 199 - 30$, i $2395 = 12 \cdot 199 + 7$. Jeżeli te ostatnie wartości podstawimy w wyrażenia powyższe, otrzymamy:

$$x = 17p - 17 \times 199 + 30 = 17(p - 199) + 30,$$
$$y = -12p + 12 \times 199 + 7 = -12(p - 199) + 7.$$

Podstawiając zamiast $p - 199$ w powyższych wyrażeniach jedną głoskę, oznaczającą jakąkolwiek liczbę całkowitą, otrzymamy wyrażenia § 424.

434. Gdyby dane zadanie prowadziło do równania, zawierającego więcej niż dwie niewiadome, lub gdyby były dwa równania z trzema niewiadomemi i t. d., wtedy zasady wyłożone poprzednio mogą być zastosowane do tych przypadków, jak to się pokaże z rozwiązania następujących zadań:

Zadanie. Rozwiązać w liczbach całkowitych dwa równania:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 14y - 7z &= 341, \\ 10x + 4y + 9z &= 473. \end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

Wyrugujmy z tych dwóch równań x. W tym celu pomnóżmy pierwsze równanie przez 5 i następnie odejmijmy od niego równanie drugie; otrzymamy:

$$66y - 44z = 1232,$$

dzieląc zaś obie strony przez 22, będzie:

$$3y - 2z = 56 \ldots (2)$$

Oczywistą jest rzeczą, że te wartości całkowite na y i z, które zadosyć czynią równaniom danym, muszą zadosyć czynić i równaniu (2); stosując do tego ostatniego znane sposoby, otrzymamy:

$$y = 2p,\ z = 3p - 28 \ldots (3)$$

Gdyby więc było dane do rozwiązania równanie (2), wtedy powyższe wyrażenia zawierałyby odpowiedź zupełną na pytanie. Lecz wartości na y i z nietylko powinny być całkowite same, ale nadto jeszcze takie, aby przy nich i wartość na x wypadła całkowita; i z tego powodu za p można wziąć nie każdą liczbę całkowitą. W celu znalezienia odpowiednich wartości na p, podstawmy wartości na y i z z równości (3) w jedno z równań danych (1), np. w pierwsze; otrzymamy:

$$2x + 7p = 145;$$

i z tego równania znajdźmy wszystkie wartości całkowite na x i p, które zadosyć mu czynią. Postępując znanymi sposobami, znajdziemy:

$$x = 69 + 7p',\ p = 1 - 2p',$$

gdzie p' oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Podstawiając teraz wartość za p w równanie (3), wyrazimy ostatecznie wszystkie trzy niewiadome x, y i z za pomocą liczby całkowitej dowolnej p'. Mianowicie będzie:

$$x = 69 + 7p';\ y = 2 - 4p';\ z = -25 - 6p'.$$

Czyniąc w tych wyrażeniach p' równem kolejno wszystkim liczbom całkowitym od 0 do $+\infty$ i $-\infty$, otrzymamy wszystkie rozwiązania całkowite danych równań.

435. Gdybyśmy nadto chcieli znaleść nietylko wartości całkowite ale i dodatnie, wtedy należałoby wybrać tylko takie wartości na p', przy których jednocześnie byłoby:

$$7p' > -69, \text{ skąd: } p' > -9\frac{6}{7},$$
$$4p' < 2\ , \quad \text{skąd: } p' < \frac{1}{2},$$
$$6p' < -25, \text{ skąd: } p' < -4\frac{1}{6}.$$

Widzimy stąd, że jedyne wartości na p', które czynią zadosyć powyższym warunkom, są: $p' = -5, -6, -7, -8$, i -9. Podstawiając je w wyrażenia na x, y i z, otrzymamy na te ostatnie ilości wartości następujące:

$$x = 34,\ 27,\ 20,\ 13,\ \ 6;$$
$$y = 22,\ 26,\ 30,\ 34,\ 38;$$
$$z = \ \ 5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29.$$

Gdyby dane były trzy równania z czterema niewiadomemi, lub cztery równania z pięcioma niewiadomemi, lub wogóle ilekolwiek równań, w których liczba niewiadomych byłaby o jedność większą od liczby równań, wtedy w podobny sposób postępując, jak w przykładzie paragrafu poprzedniego, wyrazilibyśmy wszystkie niewiadome za pomocą jednej liczby całkowitej dowolnej p, liczba tylko działań jakie należałoby wykonać, byłaby większą.

436. Jeżeli jest jedno równanie z trzema lub większą liczbą niewiadomych, lub wogóle jeżeli jest danych m równań z $m+n$ niewiadomemi, wtedy stopień nieoznaczoności (jeżeli się tak można wyrazić), będzie jeszcze większy. Gdyby np. było dane jedno równanie z trzema niewiadomemi, wtedy do wyrażenia ogólnego każdej z niewiadomych potrzeba dwóch ilości dowolnych, całkowitych; w przypadku jednego równania z czterema niewiadomemi potrzeba będzie trzech ilości całkowitych dowolnych, i t. d. Wynalezienie takich wyrażeń ogólnych nie przedstawia żadnych szczególnych trudności; następujący przykład pokazuje, jak w takich razach należy postępować:

Rozwiązać równanie:

$$10x+9y+7z=58 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

w liczbach całkowitych i dodatnich. Znajdźmy wartość na tę niewiadomą, przy której współczynnik jest najmniejszy, jak tutaj na z. Będzie:

$$z=\frac{58-9y-10x}{7};$$

a odłączając całkowitą:

$$z=8-y-x+\frac{2-2y-3x}{7}.$$

Aby wartość na z wypadła całkowita, potrzeba aby ułamek na drugiej stronie ostatniego równania był całkowitym. Uczyńmy przeto:

$$\frac{2-2y-3x}{7}=p,$$

gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Otrzymamy stąd:

$$y=\frac{2-3x-7p}{2}=1-x-3p-\frac{x+p}{2}.$$

A że i ułamek $\frac{x+p}{2}$ powinien być także równy liczbie całkowitej, przeto:

$$\frac{x+p}{2}=p', \text{ skąd: } x=-p+2p'.$$

Podstawiając tak znalezioną wartość w wyrażenie na y, i tę ostatnią wraz z wartością na x w wyrażenie na z, otrzymamy *ostatecznie* wyrażenia wszystkich trzech niewiadomych za pomocą dwóch liczb całkowitych dowolnych p i p'. Będą one takie:

$$x=-p+2p';\; y=1-2p-3p';\; z=7+4p+p' \quad . \; . \; (2).$$

Podstawiając za p i p' wszystkie liczby całkowite, dodatnie i ujemne, znajdziemy rozwiązania.

437. Do wyrażeń ogólnych można także dojść i inną drogą, którą wskażemy na ogólnem równaniu:

$$ax+by+cz+du+\ldots\ldots+mv=k \ldots (1)$$

zawierającem n niewiadomych: x, y, $z \ldots v$.

Najprzód należy tu zauważyć, że jeżeli wszystkie współczynniki: a, b, $c \ldots m$ mają jakikolwiek wspólny dzielnik, to i k musi być podzielne przez tenże sam dzielnik, inaczej rozwiązanie równania w liczbach całkowitych jest niemożliwe (§ 419). Podzieliwszy obie strony równania przez największy wspólny dzielnik dla a, b, $c \ldots m$ i k, otrzymamy równanie, w którem współczynniki a, b, $c \ldots m$ i k są pierwszemi względem siebie; lecz może się przytrafić, że albo współczynniki a, b, $c \ldots m$, po dwa brane, mają jeszcze wspólne dzielniki, albo też, że przynajmniej dwa z nich są względnie pierwszemi. Ten ostatni przypadek jest najczęstszym i o nim tylko tutaj mówić będziemy. Przypuśćmy więc, że dwa współczynniki a i b nie mają żadnego wspólnego dzielnika. Przenosząc na drugą stronę równania (1) wszystkie wyrazy, z wyjątkiem tych dwóch, które mają za współczynniki a i b, otrzymamy:

$$ax + by = k - cz - du - \dots - mv$$

Uczyńmy dla krótkości:

$$M = k - cz - du - \dots - mv,$$

będzie:

$$ax + by = M \dots (2).$$

Na zasadzie tego co było powiedzianem w § 432 możemy zawsze znaleść dwie liczby A i B takie, że będzie:

$$aA + bB = 1;$$

mnożąc zaś obie strony tego ostatniego równania przez M, otrzymamy:

$$a \,.\, AM + b \,.\, BM = M \dots (3)$$

Odejmując równanie (3) od równania (2) będzie:

$$a\,(x - AM) + b\,(y - BM) = 0.$$

Stosując do tego równania rozumowanie § 429, otrzymamy na ogólne rozwiązanie:

$$x = AM + bw;\; y = BM - aw,$$

gdzie w oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Podstawiając teraz w te wyrażenia zamiast M jego wartość, znajdziemy ostatecznie:

$$\left.\begin{array}{l} x = A\,(k - cz - du - \dots - mv) + bw \\ y = B\,(k - cz - du - \dots - mv) - aw \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (4).$$

Tu niewiadome x i y są wyrażone za pomocą ilości całkowitej dowolnej w i $(n - 2)$-ch niewiadomych $z, u \dots v$, które mogą także przyjmować dowolne znaczenia całkowite.

Dla objaśnienia powyższego sposobu, weźmy równanie rozwiązane w poprzednim paragrafie:

$$10x + 9y + 7z = 58.$$

Ponieważ 10 i 9 są pierwsze względem siebie, przeto:

$$10x + 9y = 58 - 7z = M.$$

Dalej znajdujemy, że:

$$10 \,.\, 1 + 9 \,.\, (-1) = 1,$$

skąd:

$$10 \,.\, (M) + 9 \,.\, (-M) = M,$$

i następnie, jako rozwiązania danego równania:

$$x = M + 9w,$$
$$y = -M - 10w,$$

czyli, podstawiając zamiast M jego wartość:

$$\left.\begin{array}{l} x = 58 - 7z + 9w \\ y = -58 + 7z - 10w \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

W wyrażeniach tych z równie jak i w mogą przebiegać wszelkie wartości całkowite dodatnie i ujemne.

Z porównania wyrażeń (5) z wyrażeniami na x i y poprzedniego paragrafu możnaby sądzić na pierwszy rzut oka, że one dają zupełnie inne rozwiązania, gdyż są innej postaci. Gdybyśmy jednak napisali wszystkie odpowiedzi podług jednych i drugich wzorów, przekonalibyśmy się, że one zawierają też same liczby, tylko w innym porządku. Tak np. z wzorów (5) przy $w = 0$ mamy rozwiązania:

$$x = 58\;;\; y = -58\;;\; z = 0;$$

też same liczby otrzymamy z wzorów (2) § poprzedniego, czyniąc: $p = -8$ i $p' = 25$. Gdybyśmy we wzorach (2) § 436 uczynili $p = 0$, $p' = 0$, wtedy byłoby:

$$x = 0,\; y = 1,\; z = 7.$$

Też same wartości mieć będziemy z wyrażeń (5), jeżeli uczynimy $z = 7$, $w = -1$. I tak dalej. Możnaby zresztą ogólne wyrażenia na niewiadome przedstawić jeszcze pod inną postacią, i zawsze otrzymalibyśmy z tych wyrażeń też same rozwiązania.

Rozbiór innych przypadków rozwiązania tego rodzaju równań, mianowicie gdy pomiędzy współczynnikami $a, b, \ldots, m$ nie ma dwóch pierwszych względem siebie, musimy pozostawić dziełom obszerniejszym.

438. Gdybyśmy chcieli oznaczyć, jakie wartości należy nadać na te ilości dowolne, które wchodzą do wyrażeń ogólnych na niewiadome, aby wartości wszystkich niewiadomych wypadły dodatnie, również gdybyśmy chcieli z góry oznaczyć liczbę rozwiązań dodatnich danego równania o n niewiadomych, wtedy natrafilibyśmy na zadanie bez porównania trudniejsze od rozwiązywanego w poprzednim paragrafie. Bez wątpienia, w wielu przypadkach szczególnych, na to zadanie można dosyć łatwo odpowiedzieć; lecz ogólne zadanie jest trudne i związane z zadaniem o rozkładaniu liczb całkowitych na składniki. W przypadku jednego równania z trzema niewiadomemi:

$$ax + by + cz = k,$$

najłatwiejszym sposobem wynalezienia rozwiązań dodatnich zdaje się być taki. Z danego równania mamy:

$$ax + by = k - cz.$$

W tem ostatniem równaniu podstawiajmy za z kolejno:

$$1, 2, 3, \ldots \text{ i t. d.}$$

i wynajdźmy przy każdem podstawieniu odpowiednie wartości całkowite i dodatnie na x i y. Otrzymamy tym sposobem wszystkie żądane rozwiązania.

Nakoniec zastosowanie równań nieoznaczonych do rozwiązania zadań, odnoszących się do reguły mieszaniny, czytelnik znajdzie dobrze wyłożone w wybornem dziele St. Kramsztyka: „Arytmetyka handlowa“, str. 224 § 101.

439. Jakkolwiek rozwiązywanie równań nieoznaczonych stopnia drugiego już do nas nie należy, jednakże podamy tutaj kilka najprostszych zadań tego rodzaju, pokazujących, jak w takich przypadkach należy postępować.

Zadanie I-sze. Znaleść takie dwie liczby, których iloczyn, dodany do ich sumy, wynosiłby 79.

Oznaczając przez x i y liczby szukane, mamy podług warunków zadania:

$$(1)\ldots xy + x + y = 79, \text{ skąd:}$$

$$y = \frac{79 - x}{x + 1},$$

$$\text{a następnie: } y = -1 + \frac{80}{x+1}.$$

Ta ostatnia równość pokazuje nam, że x powinno być takie, aby $x + 1$ było jednym z dzielników liczby 80. Wynajdując wszystkie dzielniki tej ostatniej liczby znajdziemy, że one mają takie wartości: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80; więc otrzymamy wszystkie wartości całkowite na x, czyniące zadosyć danemu równaniu, przyrównywając $x + 1$ kolejno do każdego z tych dzielników. Tym sposobem otrzymamy następującą tablicę, zawierającą wartości, rozwiązujące równanie (1):

dzielniki . . .	1,	2,	4,	5,	8,	10,	16,	20,	40,	80,
$x =$	0,	1,	3,	4,	7,	9,	15,	19,	39,	79,
$y =$	79,	39,	19,	15,	9,	7,	4,	3,	1,	0.

Ponieważ zaś rozwiązania w drugiej połowie powyższych szeregów powtarzają się, przeto mamy właściwie pięć różnych rozwiązań danego zadania:

jedna liczba =	0,	1,	3,	4,	7
druga „ =	79,	39,	19,	15,	9.

440. W podobny do powyższego sposób można rozwiązać w ogólności równanie:

$$xy + ax + by = k; \ldots (1)$$

z niego otrzymamy najprzód:

$$y(x + b) = k - ax,$$

a następnie:

$$y = \frac{-ax + k}{x + b},$$

skąd, odłączając całkowitą, wypadnie:

$$y = -a + \frac{ab + k}{x + b} \ldots (2).$$

To ostatnie wyrażenie pokazuje nam, że $x + b$ powinno być dzielnikiem liczby $ab + k$. Jeżeli więc rozłożymy liczbę $ab + k$ na iloczyn dwóch czynników mn, i ostatnie równanie (2) napiszemy w tej postaci:

$$y = -a + \frac{mn}{x + b},$$

wtedy, czyniąc: $x + b = m$, skąd: $x = m - b$, otrzymamy $y = -a + n$, czyli: $y = n - a$.

Dla każdego zatem sposobu rozłożenia liczby $ab + k$ na iloczyn dwóch czynników m i n znajdziemy dwie wartości na x i dwie wartości na y. Z tych rozwiązań jedno będzie:

$$x = m - b,\ y = n - a;$$

drugie zaś otrzymamy, czyniąc:

$$x + b = n, \text{ skąd:}$$

$$x = n - b,\ y = m - a.$$

Rozłożenia zaś liczby $ab + k$ na dwa czynniki m i n łatwo się znajdują, jeżeli już mamy liczbę tę rozłożoną na czynniki pierwsze.

441. Gdyby przy iloczynie niewiadomych xy znajdował się jakikolwiek współczynnik różny od 1, wtedy należałoby podany wyżej sposób postępowania zmienić. Mianowicie: przypuśćmy, że dane równanie do rozwiązania jest:

$$axy = bx + cy + k, \ldots (1).$$

Wtedy:

$$y = \frac{bx + k}{ax - c}.$$

Pomnóżmy obie strony tego ostatniego równania przez a; będzie:

$$ay = \frac{abx + ak}{ax - c},$$

skąd, przez odłączenie całkowitej:

$$ay = b + \frac{bc + ak}{ax - c} \ldots (2)$$

Z wyrażenia, znajdującego się na drugiej stronie tej równości, wyprowadzić możemy wniosek, że $ax - c$ powinno być dzielnikiem liczby $bc + ak$. Jeżeli więc licznik $bc + ak$ przedstawimy pod postacią iloczynu dwóch czynników mn, wtedy x należy tak wybrać, aby $ax - c$ było równe jednemu z tychże czynników t. j.

$$ax - c = m, \text{ lub } = n.$$

Jeżeli zatrzymamy uwagę naszą na czynniku m, wtedy z równości pierwszej wypada, że x powinno nadto czynić zadosyć warunkowi:

$$x = \frac{m + c}{a},$$

a więc $m + c$ powinno być podzielne przez a, zatem z czynników, na które można rozłożyć liczbę $bc + ak$, te tylko należy wybrać, które po dodaniu do nich c, dadzą liczby podzielne przez a. Objaśnimy to przykładem:

Niech będzie równanie

$$5xy = 2x + 3y + 18;$$

stąd najprzód:

$$y = \frac{2x + 18}{5x - 3},$$

a następnie:

$$5y = \frac{10x + 90}{5x - 3} = 2 + \frac{96}{5x - 3}.$$

Należy więc teraz znaleść te dzielniki liczby 96, które dodane do 3 dadzą sumy podzielne przez 5. Wynajdując wszystkie dzielniki liczby 96, otrzymamy:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 32,\ 48,\ 96;$$

z nich tylko trzy, mianowicie: 2, 12, 32 mają powyżej przytoczoną własność; te trzy zatem dzielniki mogą być tutaj użyte. Jeżeli więc:

1. $5x - 3 = 2$, wtedy: $5y = 50$,
   skąd: $x = 1$; $y = 10$;
2. $5x - 3 = 12$; wtedy: $5y = 10$,
   skąd: $x = 3$; $y = 2$;
3. $5x - 3 = 32$; wtedy: $5y = 5$,
   skąd: $x = 7$, $y = 1$.

Ponieważ nie jest naszem zadaniem wykładać teoryę równań nieoznaczonych stopnia 2-go, przeto na tych najprostszych przypadkach ograniczamy powyższą wzmiankę.

PRZYKŁADY XL.

1) Rozwiązać następujące równania:

a) $8x + 65y = 81$; *b*) $17x + 23y = 183$;

c) $13x + 19y = 1170$; *d*) $123x + 567y = 5028$.

W tych samych równaniach znaleść wszystkie odpowiedzi dodatnie.

2) Rozwiązać równania:

a) $9x - 11y = 8$; *b*) $19x - 5y = 119$.

3) Rozwiązać równania:

a) $y = 13 + \frac{4}{13}(15 - x)$; *b*) $91x = 221y$;

c) $3x = 5y + 1$; *d*) $\frac{73x + 17}{19} = \frac{58y - 56}{21}$.

4) Rozwiązać następujące układy dwóch równań z trzema niewiadomemi: nadto znaleść rozwiązanie dodatnie:

(*a*) $x + 3y + 5z = 44$,
$3x + 5y + 7z = 68$;

(*b*) $x + 2y + 3z = 50$,
$4x - 5y - 6z = -66$;

(*c*) $x + y + 2z = 17$,
$x + 3y + 4z = 28$.

5) Rozwiązać następujące równanie z trzema niewiadomemi: $3x + 5y + 7z = 67$.

6) Liczbę 200 rozłożyć na takie dwie części, że pierwsza z nich podzielona przez 6 da na resztę 5, a druga podzielona przez 11 da na resztę 4.

7) Znaleść ogólne wyrażenie na liczby, które będąc podzielone przez 3, 5, 7 dadzą na odpowiednie reszty 2, 4, 6.

8) Znaleść ułamek mający tę własność, że jeżeli każdy z jego wyrazów powiększymy o 3, wtedy otrzymamy ułamek równy $\frac{5}{8}$.

9) Ma ktoś kule ołowiane dwojakiego rodzaju; kul pierwszego rodzaju ma 50 sztuk i każda z nich waży $1\frac{1}{3}$ łuta, każda kula drugiego rodzaju waży $2\frac{1}{2}$ łuta, i tych kul posiada on 25 sztuk. Ileż kul jednego i drugiego rodzaju powinien wziąć, aby ulać 40 kul, z których każda ma ważyć po $1\frac{3}{4}$ łuta?

10) Ogrodnik ma mniej niż 1000 drzew do posadzenia. Jeżeli je sadzić będzie rzędami tak, że w każdym rzędzie znajdować się będzie 37 sztuk, wtedy pozostanie mu 8 drzew; jeżeli zaś sadzić je będzie rzędami po 43 w rzędzie, wtedy pozostanie mu 11 drzew. Ileż ma drzew?

11) 180 rubli rozdzielono pomiędzy pewną liczbę mężczyzn, kobiet i dzieci w ten sposób, że każdy mężczyzna dostał 24 rb., każda kobieta 21 rb., i każde dziecko 9 rb. Ileż było mężczyzn, ile kobiet i ile dzieci?

XLI.

Postęp różnicowy.

442. Szereg liczb tworzy wtedy postęp różnicowy, czyli arytmetyczny, gdy każda z nich jest równa poprzedniej, powiększonej lub zmniejszonej o jednę i tęż samą ilość, zwaną *różnicą* lub *wykładnikiem* postępu.

Tak np. następujące szeregi tworzą postępy różnicowe:

$$2, 5, 8, 11, 14 \ldots\ldots$$

$$20, 18, 16, 14, 12 \ldots\ldots$$

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b \ldots\ldots$$

Różnicę, czyli wykładnik w postępie znajdujemy, odejmując którykolwiek wyraz od następnego. W pierwszym szeregu wykładnikiem jest 3, w drugim — 2, w trzecim b.

443. Niech a oznacza wyraz pierwszy postępu różnicowego, b zaś jego wykładnik. Wtedy drugim wyrazem będzie $a+b$, trzecim $a + 2b$, czwartym $a + 3b$ i tak dalej. Przeto w ogólności n-ty wyraz będzie $a + (n - 1)b$.

444. Szeregi tego rodzaju spotykaliśmy już przy rozwiązywaniu równań nieoznaczonych.

W rzeczy samej, w § 421 widzieliśmy, że jeżeli równaniu:

$$ax + by = k$$

czynią zadosyć wartości $x = m$, $y = n$, wtedy wszystkie rozwiązania równania danego wyrażają się za pomocą dwóch następujących szeregów:

$$x = m,\ m + b,\ m + 2b, \ldots\ldots m + pb, \ldots$$

$$y = n,\ n - a,\ n - 2a, \ldots\ldots n - pb, \ldots$$

Wartości więc na x tworzą postęp różnicowy, którego pierwszym wyrazem jest m, a wykładnikiem b (t. j. współczynnik przy y w danem równaniu); wartości zaś na y stanowią także postęp różnicowy, którego pierwszym wyrazem jest n, a wykładnikiem — a (t. j. współczynnik przy x w danem równaniu, wzięty ze znakiem —).

445. *Mając dany wyraz pierwszy i wykładnik postępu arytmetycznego, znaleść sumę danej liczby wyrazów tegoż postępu.*

Niech a oznacza wyraz pierwszy, b wykładnik, n liczbę wyrazów, l wyraz ostatni i s sumę wyrazów. Wtedy:

$$s = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots\ldots + l.$$

Oczywiście otrzymamy tęż samę sumę, pisząc szereg w odwrotnym porządku; będzie:

$$s = l + (l - b) + (l - 2b) + \ldots\ldots + a.$$

Dodając tak znalezione wyrażenia, mieć będziemy:

$$2s = (l + a) + (l + a) + \ldots\ldots n \text{ wyrazów};$$

czyli: $$2s = n\,(l + a),$$

skąd: $$s = \frac{n}{2}(l + a) \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

A że: $$l = a + (n - 1)\,b \quad \ldots \quad (2),$$

przeto: $$s = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\,b\} \quad \ldots \quad (3).$$

Równanie (3) daje wartość na s, wyrażoną za pomocą ilości, które podług zagadnienia były dane. Równanie (1) daje dogodne wyrażenie na s; — z niego otrzymujemy następujące twierdzenie: *suma wyrazów postępu arytmetycznego jest równą iloczynowi z liczby wyrazów przez połowę sumy wyrazów skrajnych.*

Zastosujemy teraz równania, znalezione w tym rozdziale, do rozwiązania niektórych zadań, dotyczących postępów różnicowych.

446. Znaleść sumę 20 wyrazów postępu:

$$1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$$

Tutaj $a = 1$, $b = 1$, $n = 20$; przeto:

$$s = \frac{20}{2}(2 + 19) = 10 \times 21 = 210.$$

447. Znaleść sumę 20 wyrazów szeregu:

1, 3, 5, 7....

Tutaj $a = 1$, $b = 2$, $n = 20$, zatem:

$$s = \frac{20}{2}(2 + 19 \times 2) = \frac{20}{2} \times 40 = 20^2 = 400.$$

448. Toż samo zadanie w ogólności da się tak wyrazić: Znaleść sumę n wyrazów postępu:

$$1, 3, 5, 7 \ldots . l,$$

stanowiącego szereg liczb nieparzystych, zaczynając od 1.

Na zasadzie wzoru (2) § 445 mamy:

$$l = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1,$$

będzie więc:

$$s = \frac{n}{2}[1 + 2n - 1] = \frac{n}{2} \times 2n,$$

czyli:

$$s = n^2.$$

449. Znaleść sumę 11 wyrazów postępu:

20, 18, 16.....

Tutaj: $a = 20$, $b = -2$, $n = 11$, przeto:

$$s = \frac{11}{2}(40 - 2 \times 10) = \frac{11}{2}(40 - 20) = \frac{11 \times 20}{2} = 110.$$

450. Znaleść sumę 8 wyrazów postępu:

$$\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \ldots .$$

Tutaj: $a = \frac{1}{12}$, $b = \frac{1}{12}$, $n = 8$,

przeto: $s = \frac{8}{2}\left(\frac{2}{12} + \frac{7}{12}\right) = 4 \times \frac{9}{12} = 3.$

451. Ile wyrazów postępu:

15, 12, 9....

należy wziąć, aby suma ich była równą 42?

Tutaj $s = 42$, $a = 15$, $b = -3$; przeto:

$$42 = \frac{n}{2}\{30 - 3(n - 1)\} = \frac{n}{2}(33 - 3n).$$

Mamy więc n znaleść z tego równania stopnia drugiego: rozwiązując je otrzymamy: $n = 4$, lub $n = 7$. Postęp żądany jest 15, 12, 9, 6, 3, 0, — 3, i z niego widzimy, że zarówno otrzymujemy sumę 42 z czterech jego pierwszych wyrazów jak i z siedmiu wyrazów.

452. Pomiędzy dwie liczby, 11 i 23 wstawić pięć liczb średnich arytmetycznych.

Tutaj należy otrzymać postęp arytmetyczny, złożony z *siedmiu* wyrazów, zaczynający się od 11 a kończący się na 23. Będzie więc w tym przypadku: $a = 11$, $l = 23$, $n = 7$; równanie przeto (2) § 445 da nam:

$$23 = 11 + 6b,$$

skąd: $b = 2.$

Cały postęp będzie przeto: 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23.

PRZYKŁADY XLI.

Znaleść sumę następujących szeregów:

1. 100, 101, 102 ..... 9 wyrazów.
2. 2, $3\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{2}$ ...... 12 wyrazów.
3. $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{11}{6}$ .. 15 wyrazów.
4. Pomiędzy 12 i 20 wstawić 3 średnie arytmetyczne.
5. Pomiędzy — 1 i 5 wstawić 8 średnich arytmetycznych.
6. Wyraz pierwszy postępu arytmetycznego jest 5, wyraz piąty zaś 11: znaleść sumę 8 wyrazów.
7. Suma pięciu liczb, stanowiących postęp arytmetyczny, wynosi 15, a suma kwadratów tychże liczb jest 55. Znaleść te liczby.

8. Jeżeli suma n pierwszych wyrazów postępu arytmetycznego jest zawsze n^2 (jakiekolwiek byłoby n), znaleść wyraz pierwszy i wykładnik.

9. Wyraz stojący na miejscu p w postępie różnicowym równa się r, wyraz stojący na miejscu q w tymże samym postępie jest równy u, liczba zaś wszystkich wyrazów jest n. Znaleść wykładnik, wyraz pierwszy, wyraz ostatni i sumę wyrazów tegoż postępu.

10. Mam tyle orzechów, że z nich mogę ułożyć trójkąt równoboczny pełny. Dostałem następnie jeszcze tyle orzechów, ile już miałem, i z nowej tej ilości orzechów ułożyłem kwadrat pełny, którego bok zawierał tyle orzechów, ile ich zawierał bok trójkąta. Po takiem ułożeniu wszystkich orzechów, okazało się, że pozostało mi jeszcze 20 orzechów. Ileż miałem orzechów z początku?

11. Pewna osoba rozpoczyna grę na takich warunkach, że w razie wygrania partyi, odbiera z banku 14 razy wziętą stawkę. Na pierwszą partyę stawia 1 rb., którego przegrywa, na drugą 2 rb., które także przegrywa, na trzecią 3rb., które również przegrywa, i t. d., na każdą następną partyę powiększa stawkę o jednego rubla. Po pewnej liczbie partyi wygrywa w końcu, i to tyle, że to co wygrała wynosiło ściśle taką sumę, jaką we wszystkich partyach do banku wniosła. Ileż partyi grała?

XLII.

Postęp ilorazowy czyli geometryczny.

453. Szereg liczb, z których każda równa się poprzedniej, pomnożonej przez pewien czynnik stały, nazywa się postępem ilorazowym czyli geometrycznym. Ten czynnik stały nazywa się *wykładnikiem* postępu.

Podług tego określenia następujące szeregi liczb są postępami geometrycznymi:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4\ .\ .\ .\ .\ .$$

Wykładnik w postępie można znaleść przez podzielenie któregokolwiek wyrazu przez bezpośrednio poprzedzający go. W pierwszym przykładzie wykładnikiem jest 3, w drugim $\frac{1}{2}$, w trzecim r.

454. Niech a oznacza wyraz pierwszy postępu geometrycznego, a r wykładnik; wtedy drugim wyrazem będzie ar, — trzecim ar^2 — czwartym ar^3 i tak dalej; n-tym wyrazem będzie ar^{n-1}.

455. *Znaleść sumę danej liczby wyrazów postępu ilorazowego, gdy są wiadome wyraz pierwszy i wykładnik postępu.*

Niech a oznacza wyraz pierwszy, r wykładnik, n liczbę wyrazów, a s sumę wyrazów. Wtedy:

$$s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ .\ .\ .\ .\ + ar^{n-1},$$

skąd:

$$sr = ar + ar^2 + ar^3 + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ + ar^{n-1} + ar^n.$$

Przez odjęcie pierwszej równości od drugiej otrzymamy:

$$sr - s = ar^n - a,$$

skąd:
$$s = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Jeżeli l oznacza wyraz ostatni, wtedy mieć będziemy:

$$l = ar^{n-1}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2),$$

i:
$$s = \frac{rl - a}{r - 1}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3).$$

Równanie (1) daje wartość na s, wyrażoną za pomocą tych ilości, które podług wysłowienia zadania są wiadome. Równanie (3) daje tęż samę wartość, wyrażoną w dogodniejszej postaci do rachunku w niektórych przypadkach.

Zastosujemy teraz te równania do rozwiązania niektórych zadań, odnoszących się do postępów ilorazowych.

456. Znaleść sumę 6 wyrazów szeregu; 1, 3, 9, 27 . . . .

Tutaj $a = 1$, $r = 3$, $n = 6$, przeto:

$$s = \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{3 - 1} = 364.$$

457. Znaleść sumę 6 wyrazów szeregu 1, —3, 9, —27...

Tutaj; $a = 1$, $r = -3$, $n = 6$; przeto:

$$s = \frac{(-3)^6 - 1}{-3 - 1} = \frac{729 - 1}{-4} = -182.$$

458. Znaleść sumę 8 wyrazów szeregu 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$....

Tutaj: $a = 4$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 8$; przeto:

$$s = \frac{4\left(\frac{1}{2^8} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{4\left(1 - \frac{1}{2^8}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{255}{64} \times \frac{2}{1} = \frac{255}{32}.$$

459. Znaleść sumę 7 wyrazów szeregu: 8, —4, 2, —1, $\frac{1}{2}$ . . . .

Tutaj $a = 8$, $r = -\frac{1}{2}$, $n = 7$; przeto:

$$s = \frac{8\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right]}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{8\left(-\frac{1}{128} - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{129}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{43}{8}.$$

460. Wstawić trzy liczby średnie geometryczne pomiędzy 2 i 32.

Tutaj należy nam znaleść postęp ilorazowy, zawierający *pięć* wyrazów, zaczynający się od 2, a kończący się na 32. W zadaniu tem więc: $a = 2$, $l = 32$, $n = 5$; na zasadzie równania (2) § 455:

$$32 = 2r^4,$$

czyli:
$$r^4 = 16 = 2^4,$$

skąd:
$$r = 2.$$

Żądany szereg jest więc: 2, 4, 8, 16, 32.

461. Wartość na s, znalezioną w § 455, możemy napisać tak:

$$s = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Przypuśćmy, że r jest *mniejsze od jedności*. Wtedy im większe będzie n, tem mniejsze będzie r^n: i, biorąc n dostatecznie wielkie, możemy uczynić r^n tak małem, jak tylko chcemy [1]. Opuszczając r^n, otrzymamy:

$$s = \frac{a}{1 - r}.$$

Wypadek, otrzymany wyżej, możemy wyrazić w ten sposób: *W postępie geometrycznym, w którym wykładnik jest liczebnic*

---

[1] Przypuśćmy, że chcemy uczynić $r^n < A$. Oznaczmy $\frac{1}{r} = q$, a zatem powinno być $\frac{1}{q^n} < A$, czyli $q^n > \frac{1}{A}$. Zauważmy, że:

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \ldots . + q^{n-1} > n,$$

gdyż każdy z tych n wyrazów, z wyjątkiem pierwszego, jest > 1. Stąd, wypada:

$$q^n - 1 > n\,(q - 1),$$

czyli:
$$q^n > 1 + n\,(q - 1).$$

Wystarcza więc uczynić:

$$1 + n\,(q - 1) > \frac{1}{A},$$

a rozwiązując tę nierówność względem n:

$$n > \frac{1 - A}{A\,(q - 1)},$$

czyli, podstawiając zamiast q jego wartość $\frac{1}{r}$:

$$n > \frac{r\,(1 - A)}{A\,(1 - r)}.$$

mniejszy od jedności, możemy wziąć zawsze dostateczną liczbę wyrazów tak, że suma ich będzie się różnić tak mało, jak tylko chcemy od $\frac{a}{1-r}$.

462. Naprzykład: weźmy szereg: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$ Tutaj $a=1$, $r=\frac{1}{2}$ przeto $\frac{a}{1-r}=2$. Biorąc dostateczną liczbę wyrazów tego szeregu, możemy sumę ich uczynić tak mało różniącą się od 2, jak tylko chcemy. I w rzeczy samej: jeżeli weźmiemy *cztery* wyrazy, otrzymamy na sumę $2-\frac{1}{8}$, jeżeli weźmiemy *pięć* wyrazów, wtedy suma ich będzie: $2-\frac{1}{16}$; jeżeli *sześć* wyrazów, wtedy suma będzie $2-\frac{1}{32}$ i tak dalej.

Wypadek powyższy wyraża się niekiedy dla krótkości w następujący sposób: *suma nieskończonej liczby wyrazów tego szeregu jest* 2, lub jeszcze krócej *suma wyrazów do nieskończoności jest* 2.

463. Ułamki peryodyczne przedstawiają nam przykład tego, co nazywamy postępem geometrycznym nieskończonym. Tak np. 0,3242424 . . . . oznacza toż samo, co:

$$\frac{3}{10}+\frac{24}{10^3}+\frac{24}{10^5}+\frac{24}{10^7}+\dots$$

Tutaj wyrazy po $\frac{3}{10}$ tworzą postęp geometryczny, którego pierwszym wyrazem jest: $\frac{24}{10^3}$, a wykładnikiem $\frac{1}{10^2}$. Stąd możemy powiedzieć, że suma nieskończonej liczby wyrazów tego szeregu jest: $\frac{24}{10^3}:\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$, to jest: $\frac{24}{990}$. Przeto wartość całego ułamka peryodycznego będzie $\frac{3}{10}+\frac{24}{990}$.

W praktyce możemy najprościej znaleść wartość ułamka peryodycznego w ten sposób:

Niech: $s=0{,}32424\dots$

wtedy: $10s=3{,}2424\dots$

i: $1000s=324{,}2424\dots$

stąd, przez odjęcie drugiej równości od trzeciej, będzie: $(1000-10)\,s=324-3=321$,

i następnie: $s=\frac{321}{990}$.

Każde inne zadanie może być rozwiązane w podobny sposób.

PRZYKŁADY XLII.

Zsumować następujące postępy:

1. 1, 4, 16 . . . . . do 6 wyrazów.
2. $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$ . . . . . do 12 wyrazów.
3. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$ . . . . . do nieskończoności.
4. $6, -2, \frac{2}{3}$ . . . . . do nieskończoności.

Znaleść wartości następujących ułamków peryodycznych:

5. 0,151515 . . . . .
6. 0,28131313 . . . . .

7. Wstawić 4 średnie geometryczne pomiędzy $5\frac{1}{3}$ i $40\frac{1}{2}$.

8. Suma trzech wyrazów postępu geometrycznego jest 21; suma kwadratów tychże wyrazów jest 189; znaleść te wyrazy.

9. W postępie ilorazowym wyraz pierwszy $a=\frac{1}{8}$, wyraz ostatni $l=1024$, liczba wyrazów $n=14$; znaleść sumę wyrazów s i wykładnik r.

10. Znaleść sumę $x^9 + x^8 y + x^7 y^2 + \ldots\ldots + xy^8 + y^9$.

11. Opowiadają, że grę w szachy wynalazł Sessa Ebu Daher, dla zabawy pewnego króla w Indyach, nazwiskiem Shehran. Ten ostatni, chcąc wynagrodzić odpowiednio wynalazcę za grę, która mu się bardzo podobała, pozostawił jemu samemu wybór nagrody. Wynalazca za całą nagrodę prosił tyle pszenicy, ile wypadnie, jeżelibyśmy położyli na pierwszem polu szachownicy 1 ziarno, na drugiem 2 ziarna, na trzeciem 4 ziarna, i tak dalej aż do ostatniego 64 pola, zawsze na każde następne pole kładąc dwa razy więcej ziarn pszenicy, aniżeli ich było na poprzedniem. Królowi wydała się to zbyt mała nagroda. Okazało się jednak po obliczeniu, że taka nagroda o wiele przechodziła możność króla. Jakaż była ilość żądanej pszenicy?

XLIII.

O Logarytmach.

464. Zastanawiając się nad działaniami algebraicznemi, przychodzimy do przekonania, że każde z tych działań prowadzi także do działania odwrotnego. Następujące rozważanie bliżej tę rzecz objaśni:

Wystawmy sobie 3 liczby a, b i c, które są z sobą w pewnym związku. Rozbierzmy też takie pytanie: Jakiemi działaniami, wykonanemi na dwóch z tych liczb, możemy otrzymać liczbę trzecią? Najprostszem z tych działań jest dodawanie; otóż może się najprzód przytrafić, że liczba np. c powstaje z dodania dwóch pozostałych liczb a i b, tak że będzie:

$$a + b = c.$$

Gdybyśmy teraz, w przypuszczeniu, że c jest sumą dwóch liczb a i b, chcieli znaleść z wiadomej tej sumy c i jednego ze składników, np. b, drugi składnik a, wtedy przyszlibyśmy do działania odwrotnego dodawaniu, t. j. odejmowania. Mielibyśmy mianowicie:

$$a = c - b.$$

I ponieważ $a + b = b + a$, przeto toż samo działanie (odejmowanie), które nas prowadzi do znalezienia a z wiadomych c i b, doprowadzi nas i do znalezienia b z wiadomych c i a. Innemi słowy: dodawanie ma tylko jedno działanie odwrotne: odejmowanie. Przypadek, w którym b byłoby większe od c w równości: $a = c - b$, doprowadzi nas do pojęcia liczb ujemnych.

Następnym sposobem połączenia dwóch z liczb a, b i c, w celu otrzymania trzeciej, jest mnożenie. Mianowicie: liczba np. c może powstać przez pomnożenie dwóch liczb a i b, t. j.:

$$ab = c.$$

Gdybyśmy odwrotnie z wiadomego iloczynu c i jednego z mnożników, np. b, chcieli znaleść mnożnik drugi a, wtedy doszlibyśmy do działania odwrotnego mnożeniu, mianowicie dzielenia; byłoby wówczas $a = \frac{c}{b}$.

I tutaj, ponieważ porządek czynników nie zmienia wielkości iloczynu, t. j. ponieważ $ab = ba$, przeto toż samo działanie (dzielenie) służyłoby i do znalezienia czynnika b z wiadomego iloczynu c i drugiego czynnika a. Mnożenie ma więc także tylko jedno odwrotne działanie, mianowicie dzielenie. Rozważanie tego przypadku, w którym b nie mieści się całkowicie w c, prowadzi nas do pojęcia liczb ułamkowych.

Nakoniec, jedna z tych liczb, np. c, może być wypadkiem podnoszenia do potęg; mianowicie: liczba c może być równą jednej z pozostałych liczb, np. a, podniesionej do potęgi, której wykładnikiem jest druga liczba b. Tym sposobem: $a^b = c$. W tej równości a jest pierwiastkiem, c potęgą, b zaś wykładnikiem tej potęgi.

Gdybyśmy teraz odwrotnie, z wiadomej potęgi c chcieli znaleść liczbę a lub b, wtedy natrafilibyśmy na dwa zupełnie różne działania, z tego mianowicie powodu, że a^b nie jest wcale równe b^a. Jeżeli z wiadomej potęgi c i wykładnika b chcemy znaleść pierwiastek a, wtedy przychodzimy do jednego działania odwrotnego względem podnoszenia do potęg, mianowicie: wyciąganie pierwiastku. Rozwiązanie różnych przypadków w tem działaniu prowadzi nas do rozróżnienia ilości rzeczywistych i urojonych; wymiernych i niewymiernych.

Lecz jeżeli chcemy w inny sposób odwrócić zadanie o podnoszeniu do potęg i zadajemy sobie pytanie: do jakiej potęgi należy podnieść jednę z liczb danych a, aby otrzymać drugą liczbę daną c, wtedy natrafiamy na zupełnie innego rodzaju działanie od poprzedniego, działanie, które oddzielnego nazwiska nie otrzymało. Aby odpowiedzieć na to pytanie, przychodzimy do rozważania równań, w których niewiadoma jest wykładnikiem. Oznaczając tę niewiadomą, jak zwykle, głoską x, wypadnie nam w tym razie rozwiązać równanie:

$$a^x = c.$$

Podnoszenie więc do potęg ma dwa działania odwrotne: jedno z nich jest wyciąganiem pierwiastków; drugie, nie mające oddzielnego nazwiska, prowadzi nas do równań wykładniczych, i jak to zaraz zobaczymy, do logarytmów.

465. Jakkolwiek nie będziemy tu wykładać sposobu rozwiązania równań wykładniczych, z tem wszystkiem pokażemy najprzód główne własności wyrażenia wchodzącego do takich równań i nazwanego w matematyce wyrażeniem *wykładniczem*. Wyrażenie to jest takiej postaci: a^x, gdzie a oznacza jakąkolwiek liczbę stałą, różną od zera i jedności, a x może przybierać wszelkie wartości: całkowite, ułamkowe lub niewymierne, dodatnie lub ujemne.

Wystawmy sobie, że podstawiamy kolejno w wyrażenie a^x zamiast x wszelkie liczby, zaczynając od $-\infty$ aż do $+\infty$, przechodząc przez wszystkie stopnie wielkości. Wtedy otrzymamy taki szereg wartości:

Przy: $x = -\infty \ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots +\infty \ldots$ (1)

będzie: $a^x = \frac{1}{a^\infty} \ldots \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, a^4 \ldots a^\infty \ldots$ (2)

Jakkolwiek a w ogólnem wyrażeniu może mieć znaczenie dodatnie lub ujemne, to wszakże dla celu, jaki mamy na widoku, potrzebny jest tylko ten przypadek, gdy a oznacza liczbę dodatnią, zresztą jakąkolwiek, i ten też tylko przypadek rozpatrywać będziemy.

W szeregu (2) wyraz 1, odpowiadający znaczeniu $x=0$, jest niezależny od tej wartości szczególnej, jaką może mieć a; lecz pozostałe części tegoż szeregu w zupełności zależą od wartości a. I pod tym względem należy rozróżnić dwa przypadki: gdy $a > 1$ lub gdy $a < 1$.

1-sze. Gdy $a > 1$. Szereg (2) przedstawia wtedy szereg liczb rosnących od lewej strony w prawą; nie trudno się przekonać, że liczby te, w miarę tego, jak x powiększa się nieograniczenie, wzrastają także nieograniczenie, tak że przy $x = \infty$ i a^x ma wartość nieskończenie wielką. W rzeczy samej: jeżeli $a > 1$, wtedy możemy przyjąć że $a = 1 + k$, gdzie k oznacza pewną ilość dodatnią.

Ponieważ: $(1+k)^2 = 1 + 2k + k^2$, przeto: $(1+k)^2 > 1 + 2k$, gdyż suma $1 + 2k$ jest widocznie mniejszą od $1 + 2k + k^2$. Lecz mnożąc obie strony tej nierówności przez ilość dodatnią $1 + k$, otrzymamy: $(1+k)^3 > (1+2k)(1+k)$. A że: $(1+2k)(1+k) = 1 + 3k + 2k^2$, przeto iloczyn $(1+2k)(1+k) > 1 + 3k$; więc tembardziej:

$$(1+k)^3 > 1 + 3k.$$

Powtarzając toż samo rozumowanie, znajdziemy, że: $(1+k)^4 > 1 + 4k$; i wogóle przez nietrudną indukcyę otrzymamy ostatecznie nierówność napisaną wyżej:

$$(1+k)^x > 1 + kx \quad \ldots\ldots (3).$$

Ta nierówność pokazuje nam, że jakkolwiek k byłoby małe, możemy zawsze znaleść na x ilość dostatecznie wielką taką, że $(1+k)^x$ będzie większe od każdej ilości, jaką zechcemy pomyśleć [1]). Tak np. gdyby $k=0{,}001$ i gdybyśmy chcieli znaleść, przy jakich wartościach na x wyrażenie $(1+0{,}001)^x$ będzie większe np. od 1000, wtedy należałoby tylko rozwiązać nierówność:

$$1+0{,}001x > 1000,$$

z którejby wypadło: $x > 999000$,

co pokazuje, że przy $x > 999000$ ilość $(1+0{,}001)^x > 1000$, a tembardziej przy większych wartościach na x. I toż samo odnosi się do każdej innej wartości na k.

Możemy zatem z tego wyprowadzić wniosek, że jeżeli $a>1$, wtedy wyrazy szeregu (2), zaczynając od wyrazu środkowego 1, będą powiększać się nieograniczenie, tak, że wartości $x=\infty$, odpowiadać będzie wartość $a^x=\infty$. Przeciwnie zaś, zaczynając od tegoż samego wyrazu 1 w lewą stronę, wyrazy będą maleć tak, że jeżeli x zbliża się do $-\infty$, wtedy $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ zbliża się nieograniczenie do zera.

W uważanym zatem przypadku a większego od 1, wartości $x=0$ odpowiada $a^x=1$, wartości $x=\infty$ odpowiada $a^x=\infty$, i wartości $x=-\infty$ odpowiada $a^x=0$.

2-re. Gdy $a<1$, wówczas wyrazy szeregu (2), zaczynając od wyrazu średniego 1 w prawą stronę, będą się ciągle zmniejszać, i to nieograniczenie, tak, że dla $x=\infty$, odpowiednia wartość: $a^x=0$. W rzeczy samej: gdy $a<1$, wtedy $\frac{1}{a}$ będzie >1. Możemy więc uczynić: $\frac{1}{a}=1+k$, gdzie k oznacza pewną ilość dodatnią.

Stąd będzie: $a=\frac{1}{1+k}$ i następnie $a^x=\frac{1}{(1+k)^x}$.

[1]) Toż samo wynika z przypiska na str. 447.

A że, jak to widzieliśmy w poprzednim ustępie niniejszego paragrafu $(1+k)^x$, zaczynając od x dostatecznie wielkiego, rośnie nieograniczenie, tak że staje się większe od wszelkiej ilości, mogącej się pomyśleć, więc $\frac{1}{(1+k)^x}$, czyli a^x, staje się mniejszem od wszelkiej ilości mogącej się pomyśleć, czyli dąży nieograniczenie do 0 i przy $x=\infty$ staje się zerem. Odwrotnie, zaczynając od wyrazu 1 w lewą stronę, wyrazy szeregu (2), rosną i to nieograniczenie, tak że przy $x=-\infty$, $a^x=\infty$. Gdyż $\frac{1}{a}=1+k$ i t. d.

466. W następstwie przyjmiemy, że $a>1$ jest zarazem całkowite; ten jeden bowiem przypadek ma dla nas znaczenie praktyczne. Czyniąc to przypuszczenie, zobaczymy teraz, jakim sposobem możnaby odpowiedzieć na pytanie: czemu się równa wykładnik tej potęgi, do której należy podnieść daną liczbę a, aby otrzymać inną daną liczbę c; innemi słowami, jak wynaleść x z równania:

$$a^x = c\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Przypuszczamy tu nadto, że i c jest całkowite.

W celu rozwiązania tego równania podstawiajmy zamiast x kolejno wszystkie liczby całkowite, zaczynając od 0. Może się przytrafić, że dojdziemy do takiej liczby całkowitej, która zadosyć uczyni równaniu (1); wtedy zadanie będzie rozwiązane. Lecz zazwyczaj takiej liczby całkowitej nie znajdziemy, zawsze jednak dojdziemy do takiej liczby m, że podstawiając ją zamiast x w równanie (1), będzie:

$$a^m < c,$$

podstawiając zaś zamiast x następną liczbę całkowitą $m+1$, otrzymamy wypadek większy od c, czyli:

$$a^{m+1} > c.$$

Wtedy oczywiście prawdziwa wartość na x będzie zawartą pomiędzy m i $m+1$, czyli równać się będzie m więcej pewna ilość mniejsza od 1. Możemy więc uczynić:

$$x = m + \frac{1}{x_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Podstawiając tę wartość za x w równaniu (1), otrzymamy:

$$a^{m + \frac{1}{x_1}} = c,$$

czyli:

$$a^m \, . \, a^{\frac{1}{x_1}} = c,$$

skąd:

$$a^{\frac{1}{x_1}} = \frac{c}{a^m},$$

oznaczając zaś dla krótkości ilość $\frac{c}{a^m}$ głoską ∂, będzie:

$$a^{\frac{1}{x_1}} = \partial;$$

nakoniec podnosząc obie strony do potęgi x_1, otrzymamy:

$$\partial^{x_1} = a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Czyniąc tu kolejno: $x_1 = 0, 1, 2, 3 \ldots$ i t. d. przyjdziemy znowuż do takich dwóch po sobie następujących liczb m_1 i $m_1 + 1$, że:

$$\partial^{m_1} < a,$$

a:

$$\partial^{m_1 + 1} > a.$$

Wartość więc x_1 będzie zawartą pomiędzy liczbami m_1 i $m_1 + 1$; możemy zatem uczynić:

$$x_1 = m_1 + \frac{1}{x_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Podstawiając dalej tę wartość na x_1 w równanie (3), mieć będziemy:

$$\partial^{m_1 + \frac{1}{x_2}} = a,$$

czyli:

$$\partial^{m_1} \, . \, \partial^{\frac{1}{x_2}} = a,$$

skąd:

$$\partial^{\frac{1}{x_2}} = \frac{a}{\partial^{m_1}}.$$

Czyniąc dla krótkości $\frac{a}{\partial^{m_1}} = f$, i podnosząc obie strony tego równania do potęgi x_2, otrzymamy:

$$f^{x_2} = \partial \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Z tego równania przez kolejne podstawianie zamiast x_2 liczb całkowitych 0, 1, 2, ... znajdziemy w dalszym ciągu dwie liczby po sobie następujące m_2 i $m_2 + 1$ takie, że będzie:

$$f^{m_2} < \partial; \; f^{m_2 + 1} > \partial.$$

Wtedy możemy uczynić: $x_2 = m_2 + \frac{1}{x_3}$ i t. d., działanie to prowadzić będziemy dotąd, dopóki albo się ono nie skończy, albo też dopóki nie dojdziemy do żądanego stopnia przybliżenia. Podstawiając teraz wartość na x_1 w równanie (2), następnie wartość na x_2 i t. d., wyrazimy ostatecznie wartość na x w postaci ułamka ciągłego:

$$x = m + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \ldots}}$$

Jeżeli wartość na x, odpowiadająca równaniu (1), będzie wymierną, wtedy ułamek ten wypadnie skończony; w przeciwnym razie będzie on nieskończonym, lecz z oznaczenia coraz to większej liczby ogniw możemy tak daleko zbliżyć się do istotnej wartości na x, jak tylko chcemy.

467. Po objaśnieniach, danych w poprzednich paragrafach, możemy przystąpić do określenia logarytmu i wyłożenia głównych jego własności. Widzieliśmy, że można zawsze znaleść wartość na x taką, która zadosyć uczyni równaniu:

$$a^x = N,$$

gdzie a oznacza pewną stałą ilość dodatnią, a N jakąkolwiek liczbę.

W tem równaniu a nazywa się *zasadą*, *N liczbą* a x jej *logarytmem*. To jest:

Logarytmem liczby N przy zasadzie a nazywamy wykładnik x tej potęgi, do której należy podnieść zasadę, aby otrzymać liczbę daną.

Podług tego określenia wartość logarytmu pewnej liczby zależy od zasady; zbiór logarytmów wszystkich liczb, obliczonych przy pewnej zasadzie, nazywa się *układem logarytmów* przy tejże zasadzie.

Dla oznaczenia logarytmu przyjmiemy takie znakowanie:

$$x = Log_a N,$$

które czyta się tak: *x równa się logarytmowi liczby N przy zasadzie a.*

U spodu trzech liter początkowych wyrazu *Logarytm* pisać będziemy, jako wskazówkę, ilość oznaczającą zasadę. W przypadkach, w których niema żadnej wątpliwości co jest zasadą, oznaczenie zasady w wyrażeniu $Log_a N$ jest zbyteczne i zazwyczaj opuszcza się. Wtedy powyższe wyrażenie pisać będziemy tak: $Log\ N$, czytając *Logarytm N*.

468. Z powyższego określenia logarytmu i z uwagi na szeregi (1) i (2) § 465 wypada bezpośrednio:

1. Że logarytm 1 jest przy każdej zasadzie równy 0.

2. Że logarytm zasady jest zawsze równy 1.

3. Że przy zasadzie większej od jedności logarytmy liczb większych od jedności są dodatnie, logarytmy zaś liczb mniejszych od jedności są ujemne.

4. Że w tym przypadku, gdy $a > 1$, logarytm nieskończoności jest liczbą nieskończenie wielką dodatnią, logarytm zaś zera jest liczbą nieskończenie wielką ujemną.

5. Że przy zasadzie mniejszej od jedności, logarytmy liczb większych od jedności są ujemne, logarytmy zaś liczb mniejszych od jedności są dodatnie.

6. Nakoniec, że w tym samym przypadku, gdy $a < 1$, logarytm nieskończoności jest liczbą nieskończenie wielką ujemną, a logarytm zera jest liczbą nieskończenie wielką dodatnią.

W dalszym ciągu wykładu rozważać będziemy wyłącznie ten przypadek, w którym $a > 1$. Używając więc oznaczeń, wskazanych w poprzednim paragrafie, możemy własności dopiero co wymienione wyrazić tak:

$$1)\ Log_a 1 = 0,$$
$$2)\ Log_a a = 1,$$
$$3)\ Log_a \infty = \infty,$$
$$4)\ Log_a 0 = -\infty.$$

469. Główne własności logarytmów są następujące:

1-sza. Logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów czynników.

W rzeczy samej: niech będzie danych ilekolwiek liczb: N, N_1, N_2 ....; oznaczmy dla krótkości głoską x logarytm liczby N przy pewnej zasadzie a, podobnie $x_1 = Log_a N_1$, $x_2 = Log_a N_2$..... Podług określenia logarytmu wartości x, x_1, x_2.... są oznaczone następującemi równaniami, w których a jest zasadą:

$$a^x = N$$
$$a^{x_1} = N_1$$
$$a^{x_2} = N_2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Pomnóżmy odpowiedniemi stronami te wszystkie równania; będzie:

$$a^x \cdot a^{x_1} \cdot a^{x_2} \ldots\ldots = N \cdot N_1 \cdot N_2 \ldots\ldots,$$

czyli: $$a^{x + x_1 + x_2 + \cdots\cdots} = N \cdot N_1 \cdot N_2 \ldots$$

Ta ostatnia równość pokazuje nam, że zasadę a potrzeba podnieść do potęgi $x + x_1 + x_2 + \ldots$, aby otrzymać iloczyn $N \cdot N_1 \cdot N_2 \ldots$; z określenia więc logarytmu wypada, że:

$Log_a\,(N\,.\,N_1\,.\,N_2....) = x + x_1 + x_2 + \ldots$, czyli

(1) $Log_a\,(N\,.\,N_1\,.\,N_2...) = Log_a\,N + Log_a\,N_1 + Log_a\,N_2 + \ldots$,

a równość ta wyraża nam własność, której chcieliśmy dowieść.

2-ga. Logarytm ilorazu jest równy różnicy pomiędzy logarytmem dzielnej i logarytmem dzielnika.

Niech będą dane dwie liczby N i N_1, które należy podzielić w ten sposób, że N jest dzielną, a N_1 dzielnikiem. Dowiedziemy, że:

$$(2)\qquad Log_a\left(\frac{N}{N_1}\right) = Log_a\,N - Log_a\,N_1.$$

W tym celu oznaczmy dla krótkości głoską x logarytm liczby N przy pewnej zasadzie a, głoską zaś x_1 logarytm liczby N_1 przy tejże samej zasadzie. Wtedy x i x_1 wypadną z równań: (§ 467)

$$a^x = N\,;\; a^{x_1} = N_1.$$

Podzielmy obie strony pierwszego z tych równań przez odpowiednie strony równania drugiego; otrzymamy:

$$a^{x-x_1} = \frac{N}{N_1}\,.$$

Ta ostatnia rowność pokazuje, że należy a (zasadę) podnieść do potęgi $x - x_1$, aby otrzymać iloraz $\frac{N}{N_1}$. Podług określenia więc logarytmu, $x - x_1$ jest logarytmem liczby $\frac{N}{N_1}$ przy zasadzie a, czyli:

$$Log_a\left(\frac{N}{N_1}\right) = x - x_1\,;$$

a że: $x = Log_a\,N$; $x_1 = Log_a\,N_1$, przeto ostatecznie:

$$Log_a\left(\frac{N}{N_1}\right) = Log_a\,N - Log_a\,N_1.$$

3-cia. Logarytm potęgi jest równy iloczynowi logarytmu liczby podnoszonej do potęgi przez wykładnik potęgi.

To jest: jeżeli przez a oznaczymy pewną zasadę logarytmów, wtedy:

$$Log_a\,(N^p) = p\,.\,Log_a\,N...\;(3)$$

W rzeczy samej: oznaczmy dla krótkości głoską x, logarytm liczby N przy zasadzie a; wtedy x wypadnie z równania:

$$a^x = N.$$

Podnieśmy obie strony tego równania do potęgi p; będzie:

$$(a^x)^p = N^p, \text{ czyli: (§ 239)}$$

$$a^{px} = N^p.$$

Ta ostatnia równość pokazuje nam, że jeżeli zasadę a podniesiemy do potęgi px, wtedy otrzymamy liczbę N^p. Więc px jest logarytmem liczby N^p przy zasadzie a, czyli:

$$Log_a\,(N^p) = px, \text{ albo:}$$

$$Log_a\,(N^p) = p\;Log_a\,N.$$

4-ta. Logarytm pierwiastku jest równy ilorazowi, powstałemu z podzielenia logarytmu liczby, z której wyciągamy pierwiastek, przez wykładnik pierwiastku.

To jest: $Log_a\,(\sqrt[q]{N}) = \dfrac{Log_a\,N}{q} = \dfrac{1}{q}\,.\,Log_a\,N.$

W rzeczy samej: jeżeli przez x oznaczymy logarytm liczby N przy pewnej zasadzie a, wtedy toż x będzie określone równaniem:

$$a^x = N.$$

Wyciągnijmy pierwiastek potęgi q z obu stron tego równania; otrzymamy:

$$\sqrt[q]{a^x} = \sqrt[q]{N}, \text{ czyli: (§ 260).}$$

$$a^{\frac{x}{q}} = \sqrt[q]{N}.$$

Ta ostatnia równość pokazuje, że $\frac{x}{q}$ jest logarytmem liczby $\sqrt[q]{N}$ przy zasadzie a; to jest:

$$Log_a\left(\sqrt[q]{N}\right) = \frac{x}{q}\text{, lub nakoniec:}$$

$$Log_a\left(\sqrt[q]{N}\right) = \frac{1}{q}\, Log_a N \ . \ . \ . \ (4).$$

470. Własności logarytmów, pokazane w paragrafie poprzednim, są wielkiej wagi, i one to są przyczyną, dla której dzisiaj każdy rachunek, cokolwiek dłuższy, wykonywa się za pomocą logarytmów. Łatwo to zrozumiemy, jeżeli wystawimy sobie, że przy pewnej danej zasadzie mamy już obliczone logarytmy wszystkich liczb i ułożone w tablice w ten sposób, że jedna kolumna zawiera same liczby, druga zaś odpowiednie im logarytmy. Gdybyśmy chcieli znaleść iloczyn ilukolwiek czynników, wtedy moglibyśmy iloczyn ten wynaleść tak: odszukalibyśmy najprzód w tablicy logarytmy wszystkich czynników oddzielnie, następnie dodalibyśmy logarytmy: na zasadzie własności pierwszej § 469 suma tychże logarytmów byłaby równą logarytmowi iloczynu. Odszukawszy następnie w tablicy liczbę, odpowiednią temu ostatniemu logarytmowi, mielibyśmy żądany iloczyn. Tym sposobem mnożenie zostałoby sprowadzone do działania tego samego rodzaju, ale prostszego, mianowicie do dodawania. Podobnież na zasadzie drugiej własności, zamiast dzielić dwie liczby dla znalezienia ich ilorazu, moglibyśmy odszukać w tablicy logarytmowej najprzód logarytm dzielnej, potem logarytm dzielnika, następnie odjąć od pierwszego logarytm drugi, i otrzymalibyśmy logarytm ilorazu. Liczba, wzięta z tablicy, odpowiadająca temu ostatniemu logarytmowi, byłaby szukanym ilorazem. W podobny sposób podnoszenie do potęgi moglibyśmy sprowadzić do mnożenia logarytmu przez wykładnik potęgi; wyciąganie zaś pierwiastku do dzielenia logarytmu

liczby, z której chcemy wyciągnąć pierwiastek, przez wykładnik pierwiastku.

Uważając więc dodawanie, mnożenie i podnoszenie do potęg za działania jednego rodzaju, odejmowanie zaś, dzielenie i wyciąganie pierwiastków za działania drugiego rodzaju, możemy powiedzieć, że za pomocą logarytmów działanie każdego rodzaju zostaje sprowadzone do działania tegoż samego rodzaju, ale prostszego.

Z tego widzimy, jak wielką uwagę dla ułatwienia i skrócenia rachunków arytmetycznych mają tablice logarytmowe, zawierające logarytmy wszystkich liczb przy obranej z góry zasadzie.

471. Logarytm każdej liczby, jak to wypada bezpośrednio z samego określenia, zależy od zasady. Otóż może się przytrafić potrzeba przejścia z jednego układu logarytmów do drugiego, to jest wypada rozwiązać zadanie: jakim sposobem, mając już obliczone logarytmy wszystkich liczb przy jednej zasadzie, znaleść logarytmy tych liczb przy innej zasadzie. Do rozwiązania tego pytania przyjdziemy przez następne rozumowanie:

Przypuśćmy, że już mamy obliczone logarytmy liczb przy zasadzie a; logarytm więc pewnej liczby N jest nam wiadomy. Chcemy zaś znaleść logarytm tejże samej liczby N przy innej zasadzie b; czyli mamy: $Log_a N$, szukamy zaś: $Log_b N$. Uczyńmy dla krótkości $y = Log_b N$; wtedy y należy oznaczyć z równania:

$$b^y = N.$$

Biorąc logarytmy obu stron tego równania *przy zasadzie a*, otrzymamy:

$$y\, Log_a b = Log_a N,$$

skąd:

$$y = \frac{1}{Log_a b}\, Log_a N,$$

albo:

$$Log_b N = \frac{1}{Log_a b}\, Log_a N \,.\,.\,.\,.\,.\, (1).$$

Ta równość pokazuje nam, że aby otrzymać logarytm liczby N przy nowej zasadzie b, należy tylko logarytm tejże samej liczby przy zasadzie dawnej a pomnożyć przez czynnik stały dla całego nowego układu logarytmów i równy ułamkowi, którego licznikiem jest jedność, a mianownikiem logarytm zasady nowej (b), wzięty przy zasadzie dawnej (a). Ten ułamek $\frac{1}{Log_a b}$, przez który należy pomnożyć logarytmy wszystkich liczb przy zasadzie a, aby otrzymać logarytmy tychże liczb przy zasadzie b, nazywa się *modułem*.

Dwa są główne układy logarytmów, używane w rachunkach. Jeden, którego zasada oznacza się przez e, nazywa się *układem naturalnym*; drugi którego zasada jest 15, nazywa się *układem zwyczajnym*. Pierwszy nazywają jeszcze układem logarytmów Nepera (od nazwiska pierwszego wynalazcy logarytmów, który wyłożył swoje pomysły w dziele ogłoszonem w roku 1614 pod tytułem: Mirifici Logarithmorum canonis descriptio); drugi zaś układem logarytmów Briggsa (od nazwiska profesora w Oxfordzie, który odpowiednie tablice logarytmów ogłosił pierwszy w r. 1624 pod tytułem: Arithmetica logarithmica).

Zasada logarytmów naturalnych, która, jak to powiedzieliśmy wyżej, oznacza się we wszystkich rachunkach przez e, jest liczbą niewymierną i wyrażoną szeregiem nieskończonym:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \,.\,.\,.\,.\,.$$

Obliczając wartość przybliżoną tej ilości znajdziemy, że: $e = 2{,}718281828....$ Jest to więc ilość, której logarytm naturalny jest równy 1. Jakkolwiek zasada ta jest niewymierną, to wszakże logarytmy liczb łatwiej przy niej obliczają się, aniżeli przy innej zasadzie. Jakim sposobem to być może, i za pomocą jakiego rozważania przychodzimy do takiej zasady logarytmów, wykładać tu nie będziemy, przechodzi to bowiem zamiar, jaki założyliśmy sobie w tym rozdziale. Wspomnimy tylko, że w teoretycznych rachunkach prawie wyłącznie natrafiamy na logarytmy naturalne.

Podług przyjętego wyżej sposobu pisania logarytmów, należałoby logarytm naturalny jakiejkolwiek liczby N pisać tak: $Log_e\, N$. Lecz w tym razie opuszczać będziemy wskazówkę e, a za to pierwszą literę L pisać będziemy małą. Wyrażnie więc: $log\, N$ należy rozumieć tak: logarytm naturalny N.

Drugim głównym układem logarytmów, jest ten układ, w którym za zasadę przyjęto 10. Jego to wyłącznie używamy w rachunkach praktycznych, gdyż posiada on pewne szczególne własności, które zaraz poznamy i które pochodzą z tego, że w nim zasadą jest taż sama liczba, jaka służy za podstawę zwykłego sposobu liczenia, to jest 10. Tablice logarytmowe, zwykle używane, zawierają właśnie takie logarytmy, i z tego powodu nazywają jeszcze logarytmy zwyczajne: *logarytmami tablicowymi.*

Przy oznaczaniu ich wypadałoby używać takiego sposobu znakowania: $Log_{10}\, N$; lecz i tutaj wskazówkę 10 opuszcza się i pisze się wprost: $Log\, N$. W dwóch więc tych układach logarytmów: naturalnym i zwyczajnym, zasada przy pisaniu opuszcza się; w innych przypadkach należy ją zawsze pisać.

Widzieliśmy na początku tego paragrafu, jakim sposobem przejść od jednego układu logarytmów do drugiego. Stosując równanie (1) do przejścia od logarytmów naturalnych do logarytmów zwyczajnych, mamy:

$$Log\, N = \frac{1}{log\, 10}\, log\, N,$$

czyli logarytm zwyczajny jakiejkolwiek liczby jest równy jej logarytmowi naturalnemu, pomnożonemu przez ułamek, którego licznikiem jest 1, a mianownikiem logarytm naturalny 10. Ponieważ znaleziono za pomocą rachunków, których tu przytaczać nie możemy, że $log\ 10 = 2{,}302\ 585\ 092...$, przeto $\frac{1}{log\ 10} = 0{,}434\ 294\ 481....$ Tę ostatnią ilość oznacza się zwykle głoską M, i ją to specyalnie nazywamy *modułem logarytmów.* Jest więc:

$$Log\ N = M\ log\ N\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

gdzie: $M = 0{,}434\ .\ .\ .\ .$

To ostatnie równanie (2) daje nam możność znalezienia logarytmu zwyczajnego, skoro logarytm naturalny pewnej liczby jest już wiadomy.

Odwrotnie, gdybyśmy chcieli z logarytmu zwyczajnego odnaleść logarytm naturalny liczby, wtedy z równania (2) otrzymalibyśmy:

$$log\ N = \frac{1}{M}\ Log\ N.$$

A że: $M = \frac{1}{log\ 10}$, przeto: $\frac{1}{M} = log\ 10 = 2{,}302...$

stąd: $log\ N = 2{,}302\ .\ .\ .\ Log\ N\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3).$

472. Wychodząc z równania: $10^x = N$, otrzymujemy a logarytmy całkowitych potęg 10 takie wartości:

$$Log\ 1 = 0;\ Log\ 10 = 1;\ Log\ 100 = 2;\ Log\ 1000 = 3;\ .\ .\ .$$
i w ogóle: $Log\ 10^m = m.$

Również, ponieważ:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1;\ 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01;\ 10^{-3} = \frac{1}{10^3} =$$
$$= 0{,}001;\ \text{i w ogóle: } 10^{-m} = \frac{1}{10^m},\ \text{przeto:}$$

$$Log\ 0{,}1 = -1;\ Log\ 0{,}01 = -2;\ Log\ 0{,}001 = -3\ .\ .\ .$$
i t. d., w ogóle: $Log\ \frac{1}{10^m} = -m.$

To są jedyne logarytmy wymierne; logarytmy wszystkich liczb pozostałych są niewymierne.

473. Logarytmy niewymierne mogą być wyrażone tylko w przybliżeniu. Przybliżona wartość każdego logarytmu wyraża się w ułamku dziesiętnym; im większej liczby cyfr dziesiętnych, dokładnie oznaczonych, użyje się do wyrażenia jej, tym stopień przybliżenia będzie większy. Oznaczone tak wartości przybliżone logarytmów liczb całkowitych układają się następnie w tablice, których sposób użycia zaraz poznamy.

Każdy logarytm składa się z dwóch części: całkowitej, znajdującej się przed przecinkiem, i cyfr dziesiętnych. Część całkowita logarytmu nazywa się jego *cechą*, część dziesiętna zaś: *mantysą*. Tak np., gdy czytamy, że $Log\ 5137 = 3{,}7107096$, to w nim 3 jest cechą, pozostała zaś część ułamkowa jest mantysą. W tablicach zazwyczaj są pomieszczone tylko mantysy; cechy są opuszczone, gdyż z samego wejrzenia na daną liczbę łatwo ich się domyśleć. W rzeczy samej nie trudno pokazać, że *cecha logarytmu zawiera zawsze w sobie tyle jedności, ile jest cyfr w części całkowitej danej liczby, mniej jedna.* Gdyż skoro: $Log\ 1 = 0$, $Log\ 10 = 1$, przeto logarytmy wszystkich liczb większych od 1, a mniejszych od 10, czyli jednocyfrowych w swojej części całkowitej, będą większe od 0, a mniejsze od 1. Wyrażać się więc będą tak: 0 i część dziesiętna. Cechą ich zatem będzie 0. Podobnie: ponieważ $Log\ 10 = 1$, $Log\ 100 = 2$, przeto logarytmy wszystkich liczb większych od 10, a mniejszych od 100, wyrażać się będą tak: 1 z ułamkiem dziesiętnym, czyli cechą ich będzie 1 i t. d. Wogóle, jeżeli jakakolwiek liczba N zawiera m cyfr w swojej części całkowitej, wtedy liczba ta jest większą od 10^{m-1}, a mniejszą od 10^m. Logarytm jej przeto będzie większy od

$Log\,(10^{m-1})$, czyli od $m-1$, a mniejszy od $Log\,(10^m)$, czyli od m. Jego część całkowita zatem, czyli cecha, będzie $m-1$.

Np. $Log\ 3$, $Log\ 3\frac{2}{5}$, $Log\ 3,4928$ mieć będą za cechę 0.

$Log\ 39$; $Log\ 39{,}4$; $Log\ 84{,}56$ mieć będą za cechę 1.

$Log\ 729$; $Log\ 729{,}6$; $Log\ 999{,}35$ mieć będą za cechę 2.

$Log\ 4973$; $Log\ 4973{,}86$ i t. p., mieć będą za cechę 3 i t. d.

474. Mając już dany logarytm zwyczajny jakiejkolwiek liczby, nietrudno znaleść logarytm liczb dziesięć, sto, tysiąc i w ogólności 10^m razy większej lub mniejszej od liczby danej.

W rzeczy samej: przypuśćmy, że oznaczamy głoską N jakąkolwiek liczbę, i że logarytm tej liczby, $Log\ N$, jest znany. Chcemy zaś znaleść: po 1-sze $Log\,(10N)$, $Log\,(100N)$, $Log\,(1000N)$... i w ogólności $Log\,(10^mN)$; lub po 2-gie, $Log\left(\frac{N}{10}\right)$, $Log\left(\frac{N}{100}\right)$, $Log\left(\frac{N}{1000}\right)$, i w ogóle: $Log\left(\frac{N}{10^m}\right)$.

Co do 1-ego. Ponieważ logarytm iloczynu jest równy sumie logarytmów czynników, przeto będzie:

$$Log\ (10\ N) = Log\ N + Log\ \ 10 = Log\ N + 1$$
$$Log\ (100\ N) = Log\ N + Log\ 100 = Log\ N + 2$$
$$Log\ (1000\ N) = Log\ N + Log\ 1000 = Log\ N + 3 \text{ i t. d.}$$

$$Log\ (10^mN) = Log\ N + Log\ (10^m) = Log\ N + m.$$

Z powyższych równości czytamy, że aby otrzymać $Log\ (10N)$, należy do $Log\ N$ dodać 1; czyli wprost cechę logarytmu N powiększyć o jedność; podobnie aby znaleść $Log\ (100N)$, należy do cechy $Log\ N$ dodać 2 i t. d., w ogólności, aby znaleść $Log\ (10^m\,.\,N)$ należy do cechy $Log\ N$ dodać m.

Co do 2-go. Ponieważ logarytm ilorazu jest równy różnicy pomiędzy logarytmem dzielnej i logarytmem dzielnika, przeto:

$$Log\ \left(\frac{N}{10}\right) = Log\ N - Log\ 10 = Log\ N - 1,$$

$$Log\ \left(\frac{N}{100}\right) = Log\ N - Log\ \ 100 = Log\ N - 2,$$

$$Log\ \left(\frac{N}{1000}\right) = Log\ N - Log\ 1000 = Log\ N - 3.$$

i w ogóle:

$$Log\ \left(\frac{N}{10^m}\right) = Log\ N - Log\ 10^m = Log\ N - m.$$

Stąd czytamy, że aby znaleść $Log\left(\frac{N}{10}\right)$, należy od cechy logarytmu liczby N odjąć 1; aby znaleść $Log\left(\frac{N}{100}\right)$, należy od cechy logarytmu liczby N odjąć 2, i t. d., wogóle aby znaleść $Log\left(\frac{N}{10^m}\right)$, należy od cechy logarytmu liczby N odjąć m. Więc: logarytmy liczb, różniących się tylko liczbą zer na końcu, lub położeniem przecinka, mają jednakowe mantysy, a różnią się tylko cechami.

Te własności, opierające się na tem, że za zasadę logarytmów służy taż sama liczba, która jest zarazem podstawą systemu liczenia, dają możność znalezienia logarytmów wielu liczb z wiadomego logarytmu jednej tylko liczby przez prostą odmianę cechy. Tak np. z tablic znajdujemy, że:

$$Log\ 2587 = 3{,}4127964.$$

Na zasadzie pierwszej z dwóch powyższych własności będzie:

$$Log\ 25870 = 4{,}4127964;\ Log\ 258700 = 5{,}4127964$$

i t. d.; na zasadzie zaś drugiej własności:

$$Log\ 258{,}7 = 2{,}4127964;\ Log\ 25{,}87 = 1{,}4127964;$$
$$Log\ 2{,}587 = 0{,}4127964.$$

475. Ponieważ ułamek jest ilorazem, przeto dla znalezienia logarytmu ułamka odejmujemy logarytm mianownika od logarytmu licznika. Oznaczywszy jakikolwiek ułamek przez $\frac{p}{q}$, będzie:

$$Log\left(\frac{p}{q}\right) = Log\,p - Log\,q.$$

Jeżeli ułamek będzie niewłaściwy, t. j. jeżeli $p > q$, wtedy i $Log\,p > Log\,q$, powyższe wyrażenie da nam wartość dodatnią na $Log\left(\frac{p}{q}\right)$. Lecz gdy ułamek jest właściwy, wówczas $p < q$, $Log\,p < Log\,q$, i z wyrażenia: $Log\,p - Log\,q$ otrzymamy wartość ujemną na $Log\left(\frac{p}{q}\right)$. Że logarytmy ułamków właściwych (przy zasadzie większej od jedności) są ujemne, wypada to zresztą z tego, co było powiedziane w § 468.

Logarytmy ułamków dziesiętnych wynajdują się w podobny sposób, jak logarytmy ułamków zwyczajnych, t. j. przez odjęcie logarytmu mianownika od logarytmu licznika.

Lecz z powodu wielkiej wagi w rachunkach praktycznych i częstego zastosowania, pomówimy tu osobno o różnych sposobach wyrażenia logarytmów ułamków dziesiętnych.

Weźmy jako przykład ułamek: 0,2587. Ułamek ten możemy napisać z mianownikiem wyraźnym tak: $\frac{2587}{10000}$. Podług zasady, służącej do znalezienia logarytmu ułamka, będzie:

$$Log\ 0{,}2587 = Log\ 2587 - Log\ 10000 = 3{,}4127964 - 4;$$

czyli, wykonywając odejmowanie na drugiej stronie:

$$Log\ 0{,}2587 = -\ 0{,}5872036.$$

Podobnie znaleźlibyśmy:

$$Log\ 0{,}02587 = Log\ 2587 - Log\ 100000 = -\ 1{,}5872036;$$
$$Log\ 0{,}002587 = -\ 2{,}5872036; \text{ i t. d.}$$

I tutaj widzimy, jak przy liczbach większych od jedności, że logarytmy tych ułamków dziesiętnych, które się różnią

tylko położeniem przecinka, mają jednakowe mantysy; różne cechy stanowią całą różnicę pomiędzy tymi logarytmami. A nawet przypatrując się sposobowi otrzymywania tych logarytmów możemy ustanowić takie prawidło: Logarytm ujemny ułamka dziesiętnego ma za cechę tyle jedności, ile jest w tym ułamku zer po przecinku przed pierwszą cyfrą znaczącą; za mantysę zaś cyfry, otrzymane przez odjęcie wszystkich cyfr mantysy logarytmu licznika od 9, z wyjątkiem ostatniej cyfry z prawej strony różnej od zera, otrzymanej przez odjęcie od 10 tejże cyfry mantysy logarytmu licznika.

Gdy więc: $Log\ 2 = 0{,}3010300;$

to: $Log\ 0{,}2 = -\ 0{,}6989700;$

$Log\ 0{,}02 = -\ 1{,}6989700;$

$Log\ 0{,}002 = -\ 2{,}6989700;$

$Log\ 0{,}0002 = -\ 3{,}6989700;$ i t. d.

Lecz logarytmy ułamków rzadko używają się w tej postaci; zazwyczaj nadajemy im inną, daleko dogodniejszą do rachunku, i wskutek tego prawie wyłącznie używaną. Weźmy jeszcze raz pod uwagę tenże sam Log 0,2587. Jest on, jak wiemy, równy 3,412 7964 — 4. Możemy tę różnicę tak przedstawić:

$$Log\ 0{,}2587 = 3 + 0{,}412\,7964 - 4,$$

czyli: $$Log\ 0{,}2587 = -\ 1 + 0{,}412\,7964.$$

Tutaj logarytm ten został przedstawiony jako suma dwóch wyrazów, jednego ujemnego, drugiego dodatniego; mianowicie część całkowita jest ujemną, część zaś ułamkowa dodatnią. Zgodzono się pisać razem obie te części, odznaczając część ujemną znakiem *mniej*, napisanym u góry w ten sposób:

$$Log\ 0{,}2587 = \bar{1}{,}412\,7964.$$

Pisząc w ten sposób logarytm ułamka dziesiętnego, mówimy, że ma on cechę ujemną, a mantysę dodatnią.

Podobnie postępując znaleźlibyśmy;

$$Log\ 0{,}02587 = 3 + 0{,}4127964 - 5 = \bar{2}{,}4127964,$$

$$Log\ 0{,}002587 = 3 + 0{,}4127964 - 6 = \bar{3}{,}4127964,$$

i t. d.

Ten sposób pisania logarytmu ułamka dziesiętnego jest przeważnie używany; i my go w dalszym ciągu wyłącznie używać będziemy. Widzimy z powyższych przykładów, że w logarytmie ułamka dziesiętnego, mającym cechę ujemną, a mantysę dodatnią, cecha ujemna zawiera tyle jedności, ile jest zer przed pierwszą cyfrą znaczącą w ułamku, włączając w to i zero na całkowitą; mantysa zaś jest równa mantysie licznika. Możemy się przekonać za pomocą następującego rozumowania, że to prawidło jest ogólne: Przypuśćmy, że mamy pewien ułamek dziesiętny właściwy p, przed pierwszą cyfrą znaczącą którego znajduje się k zer, włączając w to i zero na całkowitą. Pomiędzy przecinkiem więc i pierwszą cyfrą znaczącą jest $k - 1$ zer. Przypuśćmy dalej, że mantysa logarytmu tej liczby całkowitej, jaką otrzymamy, opuszczając w danym ułamku przecinek, jest m. Na zasadzie własności, dowiedzionej w § 474, gdziekolwiekbyśmy umieścili przecinek w tej liczbie, zawsze mantysa logarytmu otrzymanej liczby pozostanie taż sama t. j. m. Posuńmy przecinek w danym ułamku w prawą stronę tak, aby pierwsza cyfra znacząca stała się całkowitą; przez takie przesunięcie przecinka powiększyliśmy ułamek 10^k razy; nowa liczba będzie więc równą $10^k . p$, mantysą w jej logarytmie będzie m, cechą zaś będzie 0, gdyż jedna tylko cyfra będzie w całkowitej (§ 473). Zatem:

$$Log\ (10^k . p) = 0, m \text{, czyli}$$

$$Log\ (10^k) + Log\ p = 0, m \text{, i dalej:}$$

$$k\ Log\ 10 + Log\ p = 0, m \text{, skąd}$$

$$Log\ p = 0, m - k,$$

czyli: podług użytego sposobu pisania;

$$Log\ p = \bar{k}, m\ .$$

Tym sposobem, mając tablice, zawierające logarytmy wszystkich liczb całkowitych, możemy odrazu bez żadnego rachunku napisać logarytm każdego ułamka dziesiętnego, z cechą ujemną i mantysą dodatnią.

Gdybyśmy mieli dany logarytm całkowicie ujemny ułamka dziesiętnego i chcieli go przekształcić na logarytm z cechą ujemną, a mantysą dodatnią, wtedy należałoby tak postępować: Weźmy jako przykład logarytm poprzednio znaleziony:

$$Log\ 0{,}02587 = -1{,}5872036.$$

Logarytm ten możemy napisać w ten sposób:

$$Log\ 0{,}02587 = -1 - 0{,}5872036\ .$$

Wartość tego logarytmu oczywiście nie zmieni się, gdy do niego dodamy 1 i odejmiemy 1; będzie wtedy:

$$Log\ 0{,}02587 = -1 - 1 + 1 - 0{,}5872036.$$

Wykonajmy dodawanie w dwóch pierwszych wyrazach, a odejmowanie w dwóch drugich; otrzymamy

$$Log\ 0{,}02587 = -2 + 0{,}4127964 \text{, czyli:}$$

$$Log\ 0{,}02587 = \bar{2}{,}4127964,$$

to jest to, co znaleźliśmy inną drogą. Gdyby znowuż zaszła potrzeba zamiany logarytmu z cechą ujemną a mantysą dodatnią na logarytm całkowicie ujemny, wtedy otrzymalibyśmy żądany wypadek przez wykonanie tego odejmowania, które właściwie jest wskazane w logarytmie, napisanym pod tą postacią.

Tak np. przypuśćmy, że:

$$Log\ 0{,}002587 = \bar{3}{,}4127964$$

potrzeba przerobić na logarytm całkowicie ujemny. Zwróćmy tylko uwagę na to, że:

$$Log\ 0{,}002587 = -3 + 0{,}4127964 = 0{,}4127964 - 3\ ;$$

wykonajmy wskazane odejmowanie; otrzymamy:

$$Log\ 0{,}002587 = -2{,}5872036\ ,$$

jak poprzednio.

Jest jeszcze jeden sposób wyrażania logarytmów ułamków dziesiętnych, dosyć często używany w pewnych rachunkach, za pomocą tak zwanego *dopełnienia* do 10. Przykład najlepiej objaśni na czem przekształcenie takie polega. Weźmy logarytm liczby już tyle razy uważanej:

$$Log\ 0{,}002587 = \bar{3}{,}4127964\,;$$

oczywiście pozostanie on bez zmiany, jeżeli do niego dodamy 10 i odejmiemy 10. Czyniąc to otrzymamy:

$$Log\ 0{,}002587 = -3 + 0{,}4127964 + 10 - 10\ ,$$

czyli: $Log\ 0{,}002587 = 10 - 3 + 0{,}4127964 - 10\ ,$

albo jeszcze: $Log\ 0{,}002587 = 7 + 0{,}4127964 - 10\ ,$

i nakoniec: $Log\ 0{,}002587 = 7{,}4127964 - 10\ .$

W praktyce ustalił się zwyczaj opuszczania -10, i pisania samego dopełnienia logarytmu; t. j. powyższy logarytm pisze się tak:

$$Log\ 0{,}002587 = 7{,}4127964\ .$$

Oczywiście zawsze należy w takim logarytmie, napisanym pod postacią całkiem dodatnią, domyśleć się odjemnika -10.

W podobny sposób otrzymalibyśmy:

$$Log\ 0{,}2587 = 9{,}4127964 - 10$$

$$Log\ 0{,}02587 = 8{,}4127964 - 10$$

$$Log\ 0{,}0002587 = 6{,}4127964 - 10.$$

Chcąc z logarytmów tak wyrażonych przejść do logarytmów z cechą ujemną i mantysą dodatnią, należy tylko odjąć 10 od odpowiedniej cechy, nie zmieniając mantysy, i różnicę ujemną napisać na miejscu cechy.

Nakoniec: chcąc z logarytmu całkowicie ujemnego przejść do dopełnienia, należy tylko do niego dodać 10 i odjąć 10.

Gdyby w wyjątkowych wypadkach cecha ujemna była większą od 10, wtedy bierze się dopełnienie do 20, lub do 30, lub w ogóle do takiej wielokrotnej 10, która będzie bezpośrednio większą od cechy danego logarytmu.

476. *Zadanie.* Obliczyć logarytmy liczb całkowitych od 0 do 10 z mantysą dwucyfrową.

Wyprowadzenie najdogodniejszych wzorów, służących do obliczania logarytmów, przechodzi zakres tej książki; musimy więc posiłkować się znanym nam już z § 466 rozwinięciem logarytmu na ułamek ciągły. Obliczymy w ten sposób Log 5, Log 7 i Log 9; mając je, łatwo już będzie znaleść logarytmy liczb pozostałych.

Niech będzie:

$$x = Log\ 5, \text{ czyli } 10^x = 5.$$

Ponieważ:

$$10^0 < 5 < 10^1,$$

czyli:

$$10^0 < 10^x < 10^1,$$

więc:

$$0 < x < 1;$$

czyniąc zaś $x = \frac{1}{x_2}$, dostaniemy:

$$10^{\frac{1}{x_2}} = 5, \text{ czyli } 5^{x_2} = 10;$$

a ponieważ:

$$5^1 < 10 < 5^2,$$

więc:

$$1 < x_2 < 2,$$

czyli można przyjąć $x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$, skąd znajdziemy, podstawiając tę wartość na x_2 w poprzednie równanie:

$$5^{1+\frac{1}{x_3}} = 10, \text{ czyli } 5\ .\ 5^{\frac{1}{x_3}} = 10,$$

skąd:

$$5^{\frac{1}{x_3}} = 2,$$

a podnosząc obie strony tej równości do potęgi x_3, otrzymamy:

$$2^{x_3} = 5.$$

Podobnie jak poprzednio, znajdziemy:

$$2^2 < 5 < 2^3,$$

uczynimy więc $x_3 = 2 + \frac{1}{x_4}$, skąd:

$$2^2 \cdot 2^{\frac{1}{x_4}} = 5, \text{ czyli } \left(\frac{5}{4}\right)^{x_4} = 2.$$

Podnosząc ułamek $\frac{5}{4}$ kolejno do potęg drugiej, trzeciej i czwartej, znajdziemy:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}; \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256};$$

widzimy więc, że:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4;$$

dlatego też uczynimy $x_4 = 3 + \frac{1}{x_5}$; podstawiając zaś tę wartość w poprzednie równanie, znajdziemy:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x_5}} = 2,$$

skąd wypadnie:

$$\frac{5}{4} = \left(\frac{128}{125}\right)^{x_5}.$$

Z tego, cośmy dotąd znaleźli, otrzymamy następujący ułamek ciągły:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x_5}}}},$$

którego przybliżenia kolejne będą (§ 404):

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{2}{3}; \frac{7}{10}; \frac{7x_5 + 2}{10x_5 + 3}.$$

Biorąc zamiast x czwarte przybliżenie, t. j. $\frac{7}{10}$, popełnimy błąd mniejszy od $\frac{1}{10^2} = 0{,}01$ (§ 410), a zatem dokładność żądana będzie osiągnięta; moglibyśmy się jednak przekonać, postępując podobnie jak poprzednio, że $x_5 > 3$ (ściślej: $9 < x_5 < 10$), a zatem mianownik piątego przybliżenia:

$$10x_5 + 3 > 30,$$

skąd wnosimy, że błąd powyższy jest mniejszy także od $\frac{1}{10.30} = \frac{1}{300}$; wiadomość ta będzie nam później potrzebna.

Rozwińmy w podobny sposób $x = Log\ 9$. W równaniu $10^x = 9$ przyjmujemy $x = \frac{1}{x_2}$, skąd:

$$9^{x_2} = 10,$$

a zatem $x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$; podstawiając tę wartość w powyższe równanie, znajdziemy:

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{x_3} = 9;$$

podnosząc zaś ułamek $\frac{10}{9}$ do coraz wyższych potęg, znajdziemy,

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{20} < 9 < \left(\frac{10}{9}\right)^{21},$$

skąd $x_3 = 20 + \frac{1}{x_4}$. Otrzymamy więc ułamek ciągły:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{x_4}}}.$$

Przybliżenia kolejne tego ułamka będą:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{20}{21}; \ldots$$

a ponieważ kwadrat mianownika trzeciego przybliżenia jest $441 > 100$, więc żądaną dokładność osiągniemy, biorąc $Log\ 9 = \frac{20}{21}$.

W podobny sposób jeszcze znajdziemy:

$$Log\ 7 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x_5}}}},$$

co daje następujące przybliżenia:

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{1};\ \frac{5}{6};\ \frac{11}{13};\ \dots$$

ponieważ $(13)^2 > 100$, więc czwarte przybliżenie jest wystarczające.

Mając już logarytmy tych trzech liczb, z łatwością znajdziemy pozostałe.

Ponieważ $2 = 10 : 5$, więc $Log\ 2 = Log\ 10 - Log\ 5 = 1 - Log\ 5 = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$, a uwzględniając możliwy błąd:

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{300} < Log\ 2 < \frac{3}{10} + \frac{1}{300};$$

a ponieważ $4 = 2^2$ i $8 = 2^3$, więc $Log\ 4 = 2\ Log\ 2$ i $Log\ 8 = 3\ Log\ 2$, skąd, mnożąc powyższą nierówność przez 2 i 3:

$$\frac{6}{10} - \frac{2}{300} < Log\ 4 < \frac{6}{10} + \frac{2}{300},$$

$$\frac{9}{10} - \frac{3}{300} < Log\ 8 < \frac{9}{10} + \frac{3}{100};$$

a zatem $Log\ 4 = \frac{3}{5}$, $Log\ 8 = \frac{9}{10}$, z błędem mniejszym od $\frac{1}{100}$.

Dalej: ponieważ $3^2 = 9$, więc $Log\ 3 = \frac{1}{2}\ Log\ 9 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{21} = \frac{10}{21}$; i wreszcie $Log\ 6 = Log\ 2 + Log\ 3 = \frac{3}{10} + \frac{10}{21} = \frac{163}{210}$.

Nie trudno się przekonać, że i tutaj granice dopuszczalnych błędów są zachowane. Znaleźliśmy więc, dołączając znane logarytmy liczb 0, 1 i 10:

$$Log\ 0 = -\infty,\ Log\ 1 = 0,\ Log\ 2 = \frac{3}{10},\ Log\ 3 = \frac{10}{21},$$

$$Log\ 4 = \frac{6}{10},\ Log\ 5 = \frac{7}{10},\ Log\ 6 = \frac{163}{210},\ Log\ 7 = \frac{11}{13},$$

$$Log\ 8 = \frac{9}{10},\ Log\ 9 = \frac{20}{21},\ Log\ 10 = 1.$$

Zamieniając wreszcie powyższe wyrażenia na ułamki dziesiętne, otrzymamy następującą tabliczkę, w której cyfry, stojące na drugim miejscu po przecinku, nie mogą się różnić od prawdziwych więcej niż o 1.

N	$Log\ N \pm 0{,}01$
0	$-\infty$
1	0,00
2	0,30
3	0,48
4	0,60
5	0,70
6	0,78
7	0,85
8	0,90
9	0,95
10	1,00

477. Tablice logarytmowe zawierają logarytmy tylko liczb całkowitych; widzieliśmy bowiem poprzednio, że do odszukania logarytmów liczb całkowitych sprowadza się wynalezienie logarytmów i liczb ułamkowych.

Ponieważ nadto cechy są zawsze łatwe do napisania z samego wejrzenia na daną liczbę, przeto cechy zazwyczaj w tablicach logarytmowych opuszczają się. Tablica więc logarytmów zawiera z jednej strony liczby całkowite, z drugiej zaś strony mantysy logarytmów tychże liczb.

Jedne tablice od drugich różnią się najprzód liczbą tych liczb całkowitych, których logarytmy są zamieszczone; powtóre stopniem przybliżenia, czyli liczbą cyfr dziesiętnych, do których mantysy są dokładnie obrachowane. Pod tym względem rozróżniają tablice małe i wielkie. W małych tablicach znajdują się logarytmy, obliczone do 4, 5-ciu lub 6-ciu cyfr dziesiętnych, wszystkich liczb całkowitych od 1 do 20000 najwyżej. W wielkich tablicach mantysy są obliczone przynajmniej do 7-miu cyfr dziesiętnych dokładnych, i w nich zawarte są logarytmy przynajmniej pierwszych 100000 liczb. Do szkolnego użytku zupełnie wystarczają tablice małe; przypuszczamy, że w rękach czytelnika znajdują się tablice logarytmów pięciocyfrowych Schlömilcha (Fünfstellige logarithmische Tafeln, Braunschweig, Vieweg) lub takież tablice Lalande'a, wydane przez Dupuis, lub wyborne tablice Hoüel'a, (Tables des logarithmes à cinq décimales. Paris, Mallet Bachelier) i t. p. Ze względu na duży i wyraźny druk, nie męczący oczu, oddajemy pierwszeństwo tablicom Schlömilcha, i o nich ciągle mówić tu będziemy, jakkolwiek w wielu częściach tablic lepszy układ mają tablice Lalande'a — Dupuis, i Hoüel'a.

Pierwsza część tablic Schlömilcha zawiera logarytmy wszystkich liczb od 1 do 10909; zawartość innych części albo objaśnia się samym tytułem, albo też do naszego przedmiotu nie należy. Pierwsza strona pierwszej części jest podzielona na 4-ry główne kolumny, z których każda cieńszą linijką jest jeszcze podzielona na dwie kolumny; nad jedną znajduje się litera N (numerus, liczba), nad drugą litera L (logarithmus). Pierwsza z tych dwóch kolumn zawiera liczby od 1 do 100, druga mieści w sobie w tych samych wierszach logarytmy tychże liczb. Tak np. obok liczby 79 widzimy 1,8976$\underline{3}$; to

znaczy że: $Log\ 79 = 1{,}89763$. Ostatnia cyfra jest podkreślona z tego powodu: wiemy, że logarytmy wszystkich liczb, z małymi wyjątkami są niewymierne; mantysy ich zatem są tylko przybliżone. Istotna wartość logarytmu 79 nie jest taką, jak napisano wyżej, ale cyfry za piątą idą do nieskończoności, i te ostatnie cyfry, zaczynając od szóstej, są opuszczone. Otóż jeżeli pierwsza z opuszczonych cyfr, czyli szósta, wynosi mniej niż 5, wtedy one po prostu się opuszczają; jeżeli zaś wynosi ona 5 lub więcej, wtedy przy opuszczaniu ich ostatnia cyfra zatrzymana powiększa się o jedność, a na znak, że ten właśnie przypadek miał miejsce, ostatnia cyfra zachowana podkreśla się. W powyższym przykładzie więc było: $Log\ 79 = 1{,}89762\ldots$; lecz pierwsza z następujących po 2 cyfr była albo 5, albo 6... albo 9; ponieważ ona została opuszczoną wraz z następującemi, przeto dla zmniejszenia błędu napisano 3 zamiast 2. I rzeczywiście, w większych tablicach możemy znaleść, że w tym logarytmie cyfra następująca po 2 jest 7.

Taż sama uwaga odnosi się do wszystkich podkreślań w całej tablicy.

Każda z następnych stronnic jest podzielona na 4-ry kolumny. Nad pierwszą jest litera N (numerus); zawiera ona kolejne liczby od 100 do 1090. Na początku drugiej jest litera L (logarithmus), która się odnosi i do trzeciej kolumny. Obie te kolumny zawierają mantysy pięciocyfrowe logarytmów liczb. Nakoniec nad czwartą kolumną są litery P. P. (partes proportionales, części proporcyonalne); znaczenie jej i użytek zaraz poznamy.

W tym wierszu, gdzie jest litera L, znajdują się jeszcze cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Każda z tych cyfr jest ostatnią cyfrą liczby, której trzy pierwsze znajdują się w kolumnie pierwszej z nagłówkiem N. Przykłady najlepiej objaśnią, jak wyszukiwać logarytm którejkolwiek z liczb, znajdujących się w tablicach.

Przykład: Znaleść $Log\ 276$.

Wiemy najprzód, że cecha tego logarytmu jest 2, gdyż liczba zawiera trzy cyfry. Co się tycze mantysy, to odszukujemy w kolumnie pierwszej tej liczby 276;. obok niej w drugiej kolumnie pod cyfrą 0 znajdujemy: 44091. Jest to mantysa logarytmu tejże liczby. Będzie więc: *Log* 276=2,44091.

Gdybyśmy chcieli znaleść *Log* 2760, wtedy logarytm szukany różniłby się od znalezionego wyżej tylko cechą, i mielibyśmy:

$$Log\ 2760 = 3{,}44091.$$

Z tego logarytmu jeszcze byłoby:

$$Log\ 27{,}6 = 1{,}44091;\ Log\ 2{,}76 = 0{,}44091$$

$$Log\ 0{,}276 = \bar{1}{,}44091;\ Log\ 0{,}0276 = \bar{2}{,}44091 \text{ i t. d.}$$

Przykład. Znaleść *Log* 2765.

Tej liczby niema w kolumnie, nad którą znajduje się głoska N; ale znajdujemy w niej najprzód liczbę 276. W kolumnie zaś trzeciej, w szeregu nad którym znajduje się cyfra 5 (ostatnia danej liczby 2765) i w tym wierszu, gdzie jest w pierwszej kolumnie 276, znajdujemy trzy cyfry 170; są to trzy ostatnie cyfry mantysy logarytmu 2765. Dwie pierwsze cyfry 44 znajdują się w kolumnie bezpośrednio leżącej pod literą L. Te dwie pierwsze cyfry dla tego zostały opuszczone, że powtarzają się one w znacznej liczbie logarytmów liczb po sobie następujących; dla oszczędzenia więc miejsca w tablicach drukują się tylko przy pierwszej z tych liczb; w następnych zaś opuszczają się. Tym sposobem dwie cyfry 44 odnoszą się do mantys wszystkich logarytmów, zawartych w następnych wierszach, aż do miejsca, od którego dwie pierwsze cyfry mantysy będą 45, jak w tej części tablicy, którą mamy przed oczyma, do liczby 282. Logarytm szukany będzie więc:

$$Log\ 2765 = 3{,}44170.$$

Należy tu jeszcze wspomnieć, że te same dwie pierwsze cyfry 44 odnoszą się także do tych trzech ostatnich cyfr

w wierszu poprzednim, przed któremi znajdują się gwiazdki: 012, 028, 044, 059 i 075.

Dalsze przykłady wprost wypisujemy bez objaśnień, zalecając wszakże czytelnikowi wyszukanie wszystkich tych logarytmów:

$$Log\ 2758 = 3{,}44059;\ Log\ 2819 = 3{,}45010;$$
$$Log\ 2823 = 3{,}45071;\ Log\ 2868 = 3{,}45758;$$
$$Log\ 354{,}7 = 2{,}54986;\ Log\ 35{,}47 = 1{,}54986;$$
$$Log\ 0{,}3547 = \bar{1}{,}54986;\ Log\ 0{,}003547 = \bar{3}{,}54986;$$
$$Log\ 8318 = 3{,}92002;\ Log\ 83{,}18 = 1{,}92002;$$
$$Log\ 0{,}8318 = \bar{1}{,}92002.$$

478. Użycie tablic logarytmowych byłoby bardzo ograniczone, gdybyśmy mogli logarytmy tych tylko liczb otrzymywać, które się bezpośrednio w tychże tablicach znajdują. Zobaczymy jednak, że każdą tablicę można niejako rozszerzyć i otrzymać z niej logarytmy liczb, nie znajdujących się w niej bezpośrednio, i to z takim stopniem przybliżenia, z jakim cała tablica jest obliczona, pod warunkiem wszakże, że te liczby nie przechodzą po za pewną granicę. Pokażemy teraz właśnie, jakim sposobem można dojść do takiego wtrącenia do tablicy nowych liczb.

W tym celu musimy najprzód zastanowić się nad pewnemi własnościami, jakie mają różnice pomiędzy logarytmami dwóch po sobie następujących liczb w tablicy. Zauważmy najprzód, że na zasadzie drugiej własności głównej logarytmów różnica pomiędzy dwoma logarytmami może być zawsze przedstawioną jako logarytm ilorazu. Weźmy trzy liczby całkowite następujące po sobie w postępie arytmetycznym, którego wykładnikiem jest r:

$$N,\ N+r,\ N+2r;$$

nie trudno się przekonać, że:

$$\frac{N+r}{N} > \frac{N+2r}{N+r} \quad \ldots . (1)$$

Należy tylko sprowadzić te dwa ułamki do jednakowego mianownika, i będzie z ułamka znajdującego się na pierwszej stronie nierówności (1):

$$\frac{(N+r)^2}{N(N+r)} = \frac{N^2+2Nr+r^2}{N(N+r)};$$

z ułamka zaś znajdującego się na stronie drugiej:

$$\frac{N(N+2r)}{N(N+r)} = \frac{N^2+2Nr}{N(N+r)}.$$

Ponieważ zaś widocznie:

$$\frac{N^2+2Nr+r^2}{N(N+r)} > \frac{N^2+2Nr}{N(N+r)},$$

przeto i nierówność (1) jest tym sposobem dowiedzioną.

Jeżeli teraz weźmiemy logarytmy obu stron nierówności (1), otrzymamy:

$$Log\,(N+r) - Log\,N > Log\,(N+2r) - Log\,(N+r). \;.\;.\; (2)$$

Pierwsza strona tej nierówności pokazuje, o ile powiększa się logarytm pewnej liczby N, jeżeli tę liczbę powiększymy o pewną ilość r; druga zaś strona podobnie pokazuje przyrost, jakiego doznaje logarytm liczby $N+r$, gdy ją znowuż powiększymy o toż samo r. Własność różnic pomiędzy logarytmami, zawartą w nierówności (2), możemy tak wyrazić:

Jeżeli liczby powiększają się o równe ilości, wtedy tym równym przyrostom liczb, odpowiadają przyrosty logarytmów ciągle zmniejszające się [1].

Gdybyśmy uczynili w powyższych nierównościach $r=1$, wtedy liczby N, $N+1$, $N+2$ tworzyłyby szereg liczb naturalnych, to jest takich, jakich logarytmy są pomieszczone

[1]) Poleca się wykreślić linię krzywą $y = Log\,x$ i sprawdzić tę własność na rysunku.

w tablicach logarytmowych. Różnice: $Log\,(N+1) - Log\,N$, $Log\,(N+2) - Log\,(N+1)$, byłyby różnicami pomiędzy logarytmami po sobie następującymi w tablicach (i dlatego często nazywane różnicami *tablicowemi*); własność wyrażona przez nierówność (2), zastosowana do różnic tablicowych, pokazuje że:

$$Log\,(N+1) - Log\,N > Log\,(N+2) - Log\,(N+1),$$

to jest, że różnice tablicowe po sobie następujące tworzyć muszą szereg malejący. Łatwo to sprawdzić: tworząc czy to za pomocą tablicy Schlömilcha, czy też jakiejkolwiek innej, różnice logarytmów kolejnych, znajdziemy, że im bardziej posuwać się będziemy w tablicy do coraz to większych liczb, tem odpowiednie różnice będą mniejsze. I jeżeli w pewnych częściach tablic znajdziemy, że różnica następna jest równą, lub nawet niekiedy większą od różnicy poprzedniej, to pochodzi to tylko z tego, że każdy logarytm w tablicy jest oznaczony w przybliżeniu, do 5-u cyfr dziesiętnych, z opuszczeniem cyfr dalszych.

479. Przechodzimy teraz do drugiej własności różnic pomiędzy logarytmami, która nas doprowadzi do wprowadzenia do tablicy liczb jakichkolwiek. Własność ta polega na tem, że jakkolwiek różnice pomiędzy logarytmami stają się coraz mniejsze, to wszakże w miarę powiększania się liczb, różnice te różnią się od siebie coraz mniej; czyli *ciągle dążą do tego, aby stać się równemi.*

Aby pokazać tę własność różnic pomiędzy logarytmami, weźmy pod uwagę oddzielnie wyrażenia, stanowiące dwie strony nierówności (2) § 478, mianowicie: $Log\,(N+r) - Log\,N$ i $Log\,(N+2r) - Log\,(N+r)$. Pierwszą z tych ilości oznaczmy głoską d, drugą zaś głoską d_1. Będzie więc:

$$d = Log\,(N+r) - Log\,N = Log\left(\frac{N+r}{N}\right),$$

$$d_1 = Log\,(N+2r) - Log\,(N+r) = Log\left(\frac{N+2r}{N+r}\right).$$

Jeżeli zaś ułamki: $\frac{N+r}{N}$ i $\frac{N+2r}{N+r}$ sprowadzimy do jednakowego mianownika, jak to uczyniliśmy w poprzednim paragrafie, otrzymamy:

$$d = Log\left[\frac{N^2+2Nr+r^2}{N(N+r)}\right], \quad \ldots \ (1)$$

$$d_1 = Log\left[\frac{N^2+2Nr}{N(N+r)}\right] \quad \ldots \ (2)$$

Odejmijmy teraz od równości (1) równość (2); będzie:

$$d - d_1 = Log\left[\frac{N^2+2Nr+r^2}{N(N+r)}\right] - Log\left[\frac{N^2+2Nr}{N(N+r)}\right];$$

a że różnica logarytmów jest równa logarytmowi ilorazu, przeto:

$$d - d_1 = Log\left[\frac{N^2+2Nr+r^2}{N^2+2Nr}\right],$$

czyli: $$d - d_1 = Log\left[1 + \frac{r^2}{N^2+2Nr}\right] \quad . \ . \ (3)$$

Ponieważ w ułamku $\frac{r^2}{N^2+2Nr}$ licznik jest stały, a mianownik w miarę powiększania się liczby N ciągle się powiększa, przeto widoczną jest rzeczą, że ułamek ten, a zatem i całe wyrażenie na drugiej stronie równości (3), ustawicznie się zmniejsza. Jeżeli w wyrażeniu (3) zamiast r podstawimy jedność, wtedy d i d_1 wyrażać będą różnice tablicowe. Równanie (3) pokazuje, że różnica pomiędzy dwiema różnicami tablicowemi jest mniejsza od takiejże różnicy poprzedzającej.

Innemi słowy: *różnice pomiędzy różnicami tablicowemi ciągle maleją w miarę posuwania się coraz dalej w tablicy.*

Jako przykład weźmy kilka po sobie następujących logarytmów w tablicy siedmiocyfrowej:

	d	$d - d_1$
$Log\ 306 = 2,4857214$		
	0,0014170	
$Log\ 307 = 2,4871384$		0,0000047
	0,0014123	
$Log\ 308 = 2,4885507$		0,0000045
	0,0014078	
$Log\ 309 = 2,4899585$		

Z wypisanych powyżej liczb widzimy: 1-sze że różnice d pomiędzy dwoma po sobie następującymi logarytmami stają się coraz mniejsze, i po 2-gie że różnice $d - d_1$ pomiędzy niemi także maleją.

Jeżeli więc posuwać się będziemy w tablicy siedmiocyfrowej, przechodząc do coraz to większych liczb, wtedy, ponieważ różnica pomiędzy różnicami tablicowemi dwóch następujących po sobie logarytmów staje się coraz to mniejsza, dojść musimy do takiej części tablicy, w której taż różnica będzie mniejszą od $\frac{1}{10000000}$, czyli od jednostki dziesiętnej siódmego rzędu. Wówczas w tej części tablicy, przy równych przyrostkach liczb, i odpowiednie przyrostki logarytmów przedstawiać się będą jako ilości równe; gdyż logarytmy obliczone są dokładnie do siedmiu cyfr dziesiętnych, a różnice pomiędzy różnicami wyrażać się będą dopiero co najwyżej w ósmych cyfrach dziesiętnych. Toż samo oczywiście stosuje się i do tablic, zawierających mniejszą liczbę cyfr dziesiętnych; w nich wcześniej nastąpi ta równość przyrostków.

480. Z poprzednich rozumowań wypada więc, że jeżeli pomiędzy dwie liczby następujące po sobie w tej części tablicy, w której już różnice pomiędzy dwoma następującymi po sobie logarytmami są równe, wstawimy liczby, z których każda następna równa się poprzedniej, powiększonej o jednę i tęż samę ilość mniejszą od 1, np. o 0,1, wtedy różnice tablicowe pomiędzy logarytmami, odpowiadającymi tym liczbom, będą tem bardziej równe. Stąd wyprowadzamy ten ważny wniosek:

W tej części tablicy, w której dwie różnice tablicowe po sobie następujące są równe, przyrostkom liczb równym, lecz mniejszym od jedności, odpowiadają równe przyrostki logarytmów, lub wyrażając się krócej, *różnice pomiędzy liczbami są proporcyonalne do różnic pomiędzy odpowiedniemi logarytmami.*

Rozumowania poprzednie pokazują, że wniosek ten jest tylko przybliżonym; ale stopień przybliżenia jest taki sam, z jakim są obliczone tablice logarytmowe.

481. Możemy teraz pokazać, jakim sposobem znaleść z tablic logarytm takiej liczby, która bezpośrednio w tablicach nie znajduje się.

1-sze. Przypuśćmy, że chcemy znaleść logarytm liczby 4385,3.

W tablicy Schlömilcha znajdujemy logarytmy liczb 4385 i 4386. Mianowicie:

$$Log\ 4385 = 3{,}64197,$$
$$Log\ 4386 = 3{,}64207;$$

różnica pomiędzy nimi = 0,00010.

Liczba dana jest o 0,3 większa od liczby 4385; gdybyśmy znaleźli, o ile się powiększa logarytm liczby 4385 wtedy, gdy sama liczba powiększa się o 0,3, wówczas dodając tę ostatnią ilość do logarytmu: 3,64197, otrzymalibyśmy logarytm żądany. Ponieważ przy powiększeniu liczby 4385 o 1 logarytm w tej części tablicy powiększa się o 0,00010, przeto, oznaczając przez x to powiększenie, jakiego dozna tenże logarytm wtedy, gdy liczbę powiększymy tylko o 0,3 na zasadzie paragrafu poprzedzającego możemy ułożyć następną proporcyę:

$$x : 0{,}00010 = 0{,}3 : 1,$$

skąd:
$$x = \frac{0{,}00010 \,.\, 0{,}3}{1} = 0{,}00003.$$

Przyrostek logarytmu więc, odpowiadający przyrostkowi liczby równemu 0,3 jest 0,00003. Dodając go do *Log* 4385, czyli do 3,64197, otrzymamy 3,64200 jako logarytm liczby 4385,3. Będzie więc:

$$Log\ 4385{,}3 = 3{,}64200.$$

Ponieważ wszystkie logarytmy w całej tablicy są obliczone do pięciu cyfr dziesiętnych, a zatem i różnice pomiędzy nimi są zawsze wyrażone w częściach stutysiącznych, przeto zazwyczaj mianowniki, zera i przecinki opuszczają się przy obliczaniu tych przyrostków, pamiętając wszakże, że mamy tu do czynienia z częściami stutysiącznemi, że zatem to, co przedstawia się w ostatecznym wypadku jako liczba całkowita, jest częścią stutysiączną. Podług tego więc powyższa proporcya tak się napisze:

$$x : 10 = 0{,}3 : 1;$$

skąd:
$$x = 3.$$

W celu ułatwienia wynajdywania takich logarytmów, które się nie znajdują w tablicy, umieszczona jest w niej na każdej stronnicy kolumna z napisem nad nią *P. P.*, to jest: „części proporcyonalne“. W tej kolumnie dla każdej z różnic tablicowych, przytrafiających się na danej stronnicy, są już obliczone przyrostki logarytmów, odpowiednie różnym przyrostkom liczb. Tak np. na stronnicy 13 tablic Schlömilcha w kolumnie *P. P.* znajdujemy jako nagłówki napisane dwie liczby 10 i 9. Są to różnice tablicowe pomiędzy logarytmami na tej stronnicy, z opuszczeniem mianowników. Pod nagłówkiem 10 z lewej strony napisane liczby są przyrostkami liczb, z opuszczeniem w nich mianowników 10; więc: 1 oznacza 0,1; 2 oznacza 0,2 i t. d., z prawej zaś strony linii pionowej odpowiednie przyrostki logarytmów. Wprost 3, oznaczających 0,3, znajdujemy 3,0; i to jest przyrostkiem logarytmu, odpowiadającym przyrostkowi liczby 0,3, wyrażonym w częściach stutysiącznych.

2-gi przykład. Przypuśćmy teraz, że chcemy znaleść logarytm liczby 4385,37. Wynajdujemy z tablic *Log* 4385 =

$= 3,64197$; różnicę pomiędzy następnym i tym logarytmem możemy znaleść na pamięć, nie wypisując drugiego logarytmu: będzie to znalezione w poprzednim przykładzie 10; następnie z proporcyi:

$$x : 10 = 0,37 : 1,$$

otrzymujemy: $x = 3,7$.

W tej wartości na x całkowita 3 oznacza stutysiączne części; 7 zaś części milionowe. Ponieważ używane przez nas tablice dochodzą tylko do części stutysiącznych, przeto milionowe opuszczamy; — ale ponieważ jest ich więcej, aniżeli połowa stutysiącznej, zatem cyfrę zatrzymaną 3 powiększamy o 1. Na odpowiedni przyrostek logarytmowy otrzymamy tym sposobem 4. Dodając go do *Log* 4385, znajdziemy w końcu:

Log 4385,37 = 3,64201.

Moglibyśmy proporcyi powyższej nie układać, mając przed oczyma kolumnę *P. P.* Poprawkę logarytmową dla 0,3 mamy w niej bezpośrednio napisaną; jest ona 3. Co się zaś tyczy 0,37, to ponieważ $0,37 = 0,3 + 0,07$, przeto do powyższego przyrostku 3, należy dodać jeszcze przyrostek, odpowiadający 0,07. Jakkolwiek nie mamy go bezpośrednio w tablicy, to wszakże mamy tam przyrostek, odpowiadajacy 0,7; — jest on 7. Dla 0,07 będzie więc on 10 razy mniejszy, t. j. będzie $= 0,7$. Dodając tę ostatnią ilość do 3, otrzymamy na całkowity przyrostek 3,7, z którym należy postąpić tak, jak było pokazane wyżej. Rachunek sam zwykle rozkładamy w następny sposób:

Log 4385	= 3,64197
0,3 . . .	3
0,07	0,7
Log 4385,37 =	3,64201.

3-ci przykład. Znaleść *Log* 3059,4. Wykonywamy tu całą robotę bez żadnych objaśnień:

Log 3059 = 3,48558	
Log 3060 = 3,48572	
1	14

różnica pomiędzy liczbami . . . . różnica tablicowa.

$$x : 14 = 0,4 : 1;$$

$x = 5,6 = 6$ (z dostatecznem przybliżeniem).

Log 3059,4 = 3,48564.

Lub, z użyciem kolumny „części proporcyonalne“:

Log 3059 = 3,48558	
0,4	5,6
Log 3059,4 = 3,48564.	

Czytelnik sam obliczy podług powyższych wzorów następujące logarytmy, które podajemy dla wprawy:

Log 1387,2 = 3,14214; *Log* 2743,8 = 3,43835;
Log 5129,4 = 3,71007; *Log* 8976,5 = 3,95310.

482. Zasady wyłożone w poprzednim paragrafie dają nam możność wynalezienia logarytmu jakiejkolwiek liczby. Następne przykłady najlepiej rzecz wyjaśnią:

1-szy przykład. Znaleść logarytm liczby 24567.

Liczby tej w tablicach nie znajdujemy, gdyż rozciągają się one tylko do 10909. Lecz sposobem, wyłożonym poprzednio, możemy znaleść logarytm liczby 2456,7, otrzymanej przez odcięcie przecinkiem jednej cyfry, tak, że to co pozostało przed przecinkiem znajduje się w tablicach. Postępując znanym sposobem, otrzymamy:

Log 2456,7 = 3,39035.

A ponieważ liczba dana 24567 jest 10 razy większą od 2456,7, przeto logarytm jej mieć będzie też samę mantysę, cechę zaś większą o 1. Znajdziemy zatem ostatecznie:

Log 24567 = 4,39035.

2-gi przykład. Znaleść logarytm liczby 3,5786.

Jakkolwiek dana liczba jest zawarta pomiędzy 3 i 4, to wszakże nie będziemy brali tutaj logarytmu 3 i dodawali do niego przyrostku proporcyonalnego do 0,5786, gdyż w tej części tablicy różnice tablicowe są dalekie od równości, a zasada proporcyonalności przyrostków liczb do przyrostków logarytmów dopiero wtedy może być stosowaną, gdy różnice tablicowe są równe (§ 480). Przez przesunięcie przecinka w prawą stronę o trzy cyfry, otrzymamy liczbę 3578,6, której logarytm mieć będzie też samę mantysę co i logarytm liczby 3,5786, i której część całkowita 3578 przypadać będzie w tej części tablicy, do której z większem przybliżeniem można zastosować zasadę części proporcyonalnych. Ponieważ *Log* 3578 = 3,55364, różnica tablicowa jest 12, a przyrostek logarytmowy, odpowiedni przyrostkowi liczby 0,6 jest 7,2, przeto otrzymamy:

$$Log\ 3578{,}6 = 3{,}55371\ .$$

A zatem ostatecznie będzie:

$$Log\ 3{,}5786 = 3{,}55371 - 3\ ,\ \text{czyli}$$
$$Log\ 3{,}5786 = 0{,}55371\ .$$

W ogóle przy wynajdywaniu logarytmu liczby, nie znajdującej się bezpośrednio w tablicy, należy zawsze zacząć działanie od umieszczenia przecinka w niej w ten sposób, aby z lewej strony na całkowitą była odciętą największa liczba, jaka znajduje się jeszcze w tablicy.

3-ci przykład. Znaleść logarytm liczby 879357.

Odcinając przecinkiem z lewej strony największą liczbę, jakiej logarytm znajduje się w tablicach, otrzymamy 8793,57.

Dodając do logarytmu liczby 8793, to jest do 3,94414 poprawkę odpowiednią ułamkowi 0,57, która jest 3 (dokładniej 2,85), mieć będziemy na szukany logarytm:

$$Log\ 8793{,}57 = 3{,}94417\ .$$
$$Log\ 879357 = 5{,}94417\ .$$

Lecz gdybyśmy teraz chcieli znaleść logarytm liczby 879358, lub *Log* 879359, wtedy postępując tak jak wyżej,

i wynajdując poprawkę bądź to odpowiednią 0,58, bądź też odpowiednią 0,59, otrzymamy na nią znowuż toż samo 3 (w pierwszym razie 2,90, w drugim 2,95), skąd mieć będziemy:

$$Log\ 879358 = 5{,}94417\ ,$$
$$Log\ 879359 = 5{,}94417\ .$$

Gdybyśmy w liczbie 879357 po za ostatnią cyfrą 7 dopisali jakiekolwiek cyfry, wtedy one oczywiście jeszcze mniej miałyby wpływu na poprawkę, jak cyfra 7, i zawsze otrzymalibyśmy dla takiej liczby logarytm napisany wyżej. Te przykłady prowadzą do uwagi, że przy użyciu tablic, w których logarytmy są obliczone z przybliżeniem do pięciu cyfr dziesiętnych, nie można, w ogóle mówiąc, oznaczyć w sposób pewny mantysy logarytmów liczb, zawierających więcej niż pięć cyfr znaczących. Cyfry znajdujące się w liczbie danej po za piątą cyfrą, rachując ku stronie prawej, mają wpływ na dalsze cyfry mantysy, ale nie na piątą.

Stąd przy wykonywaniu działań nad liczbami za pomocą logarytmów pięciocyfrowych, użycie w tychże liczbach więcej niż pięciu cyfr znaczących nie prowadzi do wypadku więcej przybliżonego, aniżeli wtedy, gdy zachowujemy w liczbie tylko pięć cyfr. Na tę okoliczność należy zwracać uwagę, aby nie przeciążać ani liczb użytych do działania, ani też ostatecznych wypadków zbytecznemi cyframi, nie mającemi w rzeczywistości żadnego znaczenia.

Musimy tutaj ograniczyć się na tej wzmiance, nie wchodząc w bliższy rozbiór tej kwestyi, związanej z ogólnem pytaniem o znaczeniu stopnia przybliżenia przy rachunku logarytmami, pytaniem przechodzącem znacznie po za zakres niniejszego dziełka. Możemy tutaj tylko postawić jako ogólną zasadę (wszakże nie bezwzględnie prawdziwą), że przy rachunku, wykonywanym za pomocą jakichkolwiek tablic logarytmowych, liczby użyte powinny w swoich częściach znaczących zawierać najwyżej tyle cyfr, ile ich jest w mantysach logarytmów. Użycie większej liczby cyfr nie prowadzi do wypadków dokładniejszych, ani też rachowanie większej liczby cyfr w ostatecznym wypadku nie daje wartości więcej przybliżonej do prawdziwej.

4-ty przykład. Znaleść *Log* 0,0041587.

Podług zasad wyłożonych wyżej, będzie:

$$Log\ 0{,}0041587 = Log\ \frac{41587}{10000000} = Log\ 41587 - Log\ 10000000 = Log\ 41587 - 7.$$

A że na logarytm 41587 znajdujemy:

$$Log\ 41587 = 4{,}61896,$$

przeto:

$$Log\ 0{,}0041587 = 4{,}61896 - 7,$$

co możemy ostatecznie wyrazić jednym z trzech sposobów: albo jako logarytm całkowicie ujemny:

$$Log\ 0{,}0041587 = -2{,}38104,$$

albo jako logarytm z cechą ujemną, a mantysą dodatnią:

$$Log\ 0{,}0041587 = \overline{3}{,}61896,$$

albo nakoniec za pomocą dopełnienia do 10:

$$Log\ 0{,}0041587 = 7{,}61896 - 10.$$

483. Pokażemy teraz, jak rozwiązać zadanie odwrotne, to jest jak znaleść liczbę, której logarytm jest wiadomy. Oczywiście pytanie nie przedstawia żadnej trudności, gdy mantysa danego logarytmu znajduje się w tablicach.

1-szy przykład. Znaleść liczbę N, której logarytm jest równy 3,75488.

Podług zadania: $Log\ N = 3{,}75488$.

Wynajdujemy najprzód *w tej części tablicy, w której są logarytmy liczb czterocyfrowych*, tę stronicę, na której są dwie pierwsze cyfry mantysy, t. j. 75; następnie w odstępie pomiędzy 75 i 76 wyszukujemy na tej samej stronnicy trzech ostatnich cyfr, t. j. 488. Znajdują się one w tym wierszu, w którym w pierwszej kolumnie jest liczba 568, i w tej kolumnie, nad którą jest ostatnia cyfra liczby 7. Szukana więc liczba:

$$N = 5687.$$

Gdyby było $Log\ N = 1{,}75488$, wtedy szukając w taki sam sposób, znaleźlibyśmy też same cyfry, z których się składa liczba N, mianowicie 5687. Lecz nie byłaby to liczba żądana, gdyż zawiera cztery cyfry całkowite: tymczasem cecha logarytmu jest 1, t. j. o dwie jedności mniejsza od 3. Liczba szukana jest więc *sto* razy mniejsza od 5687, czyli:

$$N = 56{,}87.$$

Podobnie, gdyby było:

$$Log\ N = 5{,}75488,$$

wtedy znaleźlibyśmy, że:

$$N = 568700.$$

Nakoniec jeżeliby dano:

$$Log\ N = \overline{1}{,}75488,$$

wówczas N byłoby ułamkiem dziesiętnym, mającym przed pierwszą cyfrą znaczącą *jedno* zero (gdyż cecha jest -1), włączając w to i całkowitą; cyfry zaś znaczące tego ułamka stanowią liczbę całkowitą, której logarytm ma za mantysę 75488. Otrzymalibyśmy więc:

$$N = 0{,}5687.$$

2-gi przykład. Wiedząc, że $Log\ N = 1{,}62798$, znaleść liczbę N.

Przy wyszukiwaniu liczby odpowiedniej danemu logarytmowi z początku nie zwracamy nigdy uwagi na cechę, ale tylko na mantysę; i jakkolwiek tutaj cecha jest 1, co pokazuje, że część całkowita liczby mieć będzie tylko dwie cyfry, to wszakże szukamy tejże mantysy zawsze w tej części tablicy, która zawiera logarytmy liczb czterocyfrowych. Może się bowiem przytrafić, że mantysy tej niema w części tablicy, zawierającej małe liczby (jak w tablicy Schlömilcha mniejsze od 100), a jednak znajduje się ona w części tablicy, zawierającej logarytmy większych liczb. Nadto gdyby się okazało, że tej mantysy niema wcale w tablicy logarytmów, wtedy dla wynalezienia odpowiedniej liczby trzeba będzie użyć zasady proporcyonalności przyrostków liczb do przyrostków logarytmów, zasady, która jak już wiemy daje się zastosować tylko do tej części tablicy, która obejmuje logarytmy liczb największych.

Mantysy logarytmu danego w tym przykładzie nie znajdujemy na pierwszej stronnicy tablic, zawierającej logarytmy liczb dwucyfrowych, znajduje się ona jednak pomiędzy mantysami, odpowiadającemi liczbom czterocyfrowym, mianowicie odpowiada ona liczbie 4246. A że cecha danego logarytmu jest 1, przeto szukana liczba będzie:

$$N = 42{,}46.$$

3-ci przykład. Wiedząc, że $Log\ N = 3{,}51140$, znaleść liczbę N.

W tablicy nie znajdujemy mantysy 51140; są tylko mantysy 51135 i 51148, pomiędzy któremi mantysa logarytmu danego jest zawartą. Odpowiadają one liczbom: 3246 i 3247; to jest:

$$Log\ 3246 = 3{,}51135,$$
$$Log\ 3247 = 3{,}51148.$$

Ponieważ dany logarytm 3,51140 jest zawarty pomiędzy logarytmami 3,51135 i 3,51148, przeto i liczba szukana N będzie zawierać się pomiędzy liczbami 3246 i 3247, to jest równać się będzie liczbie 3246 więcej pewna ilość mniejsza od jedności, którą oznaczmy przez y. Tym sposobem będzie:

$$N = 3246 + y.$$

Aby wynaleść y, użyjemy tutaj tej zasady, że różnice pomiędzy liczbami są proporcyonalne do różnic pomiędzy lo-

garytmami (§ 480). Różnica tablicowa tych logarytmów, pomiędzy którymi dany logarytm jest zawarty, jest 0,00013, czyli 13 (§ 481, przykład 1-szy), i tej różnicy odpowiada różnica pomiędzy liczbami równa 1 (3247 — 3246). Logarytm dany 3,51140 jest większy od logarytmu mniejszego ze znajdujących się w tablicy 4,51135 o 5; i tej różnicy pomiędzy logarytmami odpowiada różnica pomiędzy liczbami równa y. Będzie więc:

$$y : 1 = 5 : 13,$$

skąd: $$y = \frac{5}{13} = 0{,}38\ldots = 0{,}4.$$

Liczba szukana więc $N = 3246 + 0{,}4$ czyli:

$$N = 3246{,}4.$$

4-ty przykład. Wiedząc że $Log\ N = 2{,}78410$, znaleść liczbę N.

Gdybyśmy znaleźli liczbę, której logarytm miałby za cechę 3, a mantysę tęż samę co i logarytm dany, to jest której logarytm byłby 3,78410, wtedy przez proste posunięcie przecinka o jednę cyfrę w lewą stronę otrzymalibyśmy z tej liczby i liczbę N.

Mantysy 78410 nie znajdujemy w tablicy; są tylko mantysy 78405 i 78412, pomiędzy któremi zawiera się mantysa logarytmu danego. Pierwsza mantysa odpowiada liczbie 6082, druga zaś liczbie 6083. Będzie więc:

$$Log\ 6082 = 3{,}78405,$$
$$Log\ 6083 = 3{,}78412.$$

Różnica tablicowa pomiędzy tymi logarytmami jest 7; odpowiada ona różnicy pomiędzy liczbami 1. Różnica pomiędzy logarytmem danym 3,78410 i logarytmem mniejszym ze znalezionych jest 5. Oznaczając więc przez y przyrostek liczby, odpowiadający przyrostkowi logarytmu równemu 5, będzie:

$$y : 1 = 5 : 7,$$

skąd: $$y = \frac{5}{7} = 0{,}7.$$

Liczba więc, której logarytm jest 3,78410 jest równą 6082 + 0,7, czyli: 6082,7. Zatem liczba szukana N będzie:

$$N = 608{,}27.$$

5-ty przykład. Wiedząc, że $Log\ N = 3{,}57545$, znaleść N.

Wynajdźmy liczbę, której logarytm ma tęż samę mantysę 57545, a cechę 3; to jest liczbę, której logarytm jest 3,57545. Wtedy przez proste przesunięcie przecinka, znajdziemy liczbę N. Mianowicie będzie: liczba, której logarytm jest 3,57545 jest 3762,3; liczba szukana zatem: $N = 0{,}0037623$.

6-ty przykład. Wiedząc, że $Log\ N = -1{,}41736$, znaleść N.

Gdy dany jest logarytm ułamka całkowicie ujemny, należy najprzód przekształcić go na logarytm z cechą ujemną i mantysą dodatnią, sposobem podanym wyżej, gdzie była mowa o logarytmie ułamków. W teraźniejszem zadaniu otrzymamy:

$$Log\ N = -1{,}41736 = -1 - 0{,}41736 = -1 - 1 + 1 -$$
$$- 0{,}41736 = \bar{2}{,}58264.$$

Postępując następnie tak, jak w przykładzie poprzedzającym, znajdziemy:

$$N = 0{,}038251.$$

484. Podamy na zakończenie tego rozdziału jeszcze kilka zadań, aby pokazać zastosowanie tablic.

Zadanie 1-sze. Następujące mnożenie wykonać za pomocą logarytmów:

$$x = 12 \times 0{,}042 \times 0{,}82683.$$

W tym celu bierzemy logarytmy obu stron; będzie:

$$Log\ x = Log\ 12 + Log\ 0{,}042 + Log\ 0{,}82683;$$

następnie rachunek układamy w ten sposób:

$$\begin{aligned} Log\ 12 &= 1{,}07918, \\ Log\ 0{,}042 &= \bar{2}{,}62325, \\ Log\ 0{,}82683 &= \bar{1}{,}91742. \\ \hline Log\ x &= \bar{1}{,}61985; \end{aligned}$$

stąd:

$$x = 0{,}41673.$$

Przy dodawaniu logarytmów, z których jedne są całkowicie dodatnie, inne zaś mają cechę ujemną i mantysę dodatnią, należy po skończeniu dodawania mantys wykonać uważnie dodawanie algebraiczne cech, *z uwzględnieniem ich znaków.*

Tak właśnie w przykładzie powyższym dodawanie zostało wykonane.

Zadanie 2-ie. Obliczyć za pomocą logarytmów wyrażenie:

$$x = \frac{67{,}2}{793}.$$

Biorąc logarytmy obu stron, otrzymamy:

$$Log\ x = Log\ 67{,}2 - Log\ 793,$$

czyli: $$Log\ x = 1{,}82737 - 2{,}89927.$$

Logarytm więc x wypada ujemny, jak być powinno, gdyż x jest mniejsze od 1. Wykonywając odejmowanie, znajdziemy:

$$Log\ x = -1{,}07190.$$

W celu wynalezienia x należy logarytm ten przekształcić na logarytm z cechą ujemną i mantysą dodatnią Lecz zazwyczaj przy wykonywaniu odejmowania odrazu przekształcamy wypadek ostateczny na logarytm takiej postaci. W tym celu do odjemnej dodajemy najmniejszą liczbę całkowitą taką, ażeby od tej sumy można było odjąć odjemnik, i następnie od wypadku tęż samę liczbę całkowitą odejmujemy. Oczywiście przez to wypadek ostateczny wartości swojej nie zmieni. Tak np. w zadaniu, które rozwiązujemy, będzie:

$$Log\ x = 1{,}82737 - 2{,}89927 = 2 + 1{,}82737 - 2{,}89927 - 2 =$$
$$= 3{,}82737 - 2{,}89927 - 2 = 0{,}92810 - 2 = -2 + 0{,}92810,$$

czyli: $$Log\ x = \bar{2}{,}92810.$$

Zazwyczaj działanie układa się tak:

$$\begin{array}{r} -2+2 \\ Log\ 67{,}2 = 1{,}82737 \\ Log\ \ 793 = 2{,}89927 \\ \hline Log\ x = \bar{2}{,}92810. \end{array}$$

Stąd otrzymamy: $x = 0{,}084742$.

Zadanie 3-cie. Znaleść wartość:

$$x = \frac{0{,}0843}{0{,}0064}.$$

Będzie najprzód:

$$Log\ x = Log\ 0{,}0843 - Log\ 0{,}0064.$$

Następnie: $$\begin{array}{r} Log\ 0{,}0843 = \bar{2}{,}92583, \\ Log\ 0{,}0064 = \bar{3}{,}80618, \\ \hline Log\ x = 1{,}11965 \end{array}$$

stąd: $$x = 13{,}172.$$

Przy wykonywaniu odejmowania logarytmu $\bar{3}{,}80618$ od logarytmu górnego, należy pamiętać, że logarytm ten składa się z dwóch wyrazów: ujemnego -3 i dodatniego $0{,}80618$. Aby więc go odjąć, powinniśmy znaki zmienić na przeciwne; zatem mantysę dolną odjąć od mantysy górnej, ale cechę dolną dodać do cechy górnej: tym sposobem otrzymamy powyższy wypadek.

Zadanie 4-te. Znaleść wartość:

$$x = (0{,}0587)^3.$$

Biorąc logarytmy obu stron, mamy:

$$Log\ x = 3\ Log\ 0{,}0587,$$

dalej: $$Log\ x = \bar{2}{,}76864 \times 3.$$

Przy wykonywaniu mnożenia należy pamiętać o tem, że właściwie mamy do pomnożenia: $(-2 + 0{,}76864)$ przez 3. Otrzymamy:

$$Log\ x = \bar{4}{,}30592;$$

skąd: $$x = 0{,}00020226.$$

Zadanie 5-te. Znaleść wartość:

$$x = \sqrt{0{,}00345}.$$

Biorąc logarytmy obu stron, otrzymamy:

$$Log\ x = \frac{1}{2}\ Log\ 0{,}00345,$$

czyli: $$Log\ x = \frac{1}{2} \times \bar{3}{,}53782 = \frac{\bar{3}{,}53782}{2}.$$

Przy wykonywaniu dzielenia tego logarytmu przez 2 napotykamy na trudność z tego powodu, że cecha jest ujemna i mantysa dodatnia, a cecha nie jest całkowicie podzielną przez 2. Aby uniknąć tej trudności należy albo zamienić logarytm na całkowicie ujemny, albo też, nie zmieniając jego wartości, przemienić go na taki, w którymby cecha ujemna w zupełności dzieliła się przez dwa. Gdybyśmy użyli pierwszego sposobu, wtedy należałoby następnie znaleziony logarytm znowuż przekształcić na logarytm z cechą ujemną i mantysą dodatnią dla znalezienia x. Aby nie wykonywać tego podwójnego przekształcenia, zazwyczaj postępujemy tak: do cechy ujemnej dodajemy tyle jedności ujemnych, ile potrzeba, aby tę cechę uczynić podzielną przez mianownik; jak tutaj dodajemy -1; aby zaś logarytm nie zmienił się, dodajemy do jego mantysy tyleż jedności dodatnich. Będzie więc:

$$Log\ x = \frac{-3 + 0{,}53782}{2} = \frac{-4 + 1{,}53782}{2} =$$
$$= -2 + 0{,}76891 = \bar{2}{,}76891.$$

Stąd: $$x = 0{,}058737.$$

Zadanie 6-te. Znaleść wartość:

$$x = \sqrt[3]{0{,}0004687}\ .$$

Mamy: $Log\ x = \frac{Log\ 0{,}0004687}{3} = \frac{\bar{4}{,}67089}{3}$.

Ponieważ cecha nie dzieli się bez reszty przez 3, przeto, postępując sposobem wskazanym wyżej, do logarytmu $\bar{4}{,}67089$ dodajemy $-2+2$; będzie więc:

$$Log\ x = \frac{-6+2{,}67089}{3} = -2 + 0{,}89030 = \bar{2}{,}89030;$$

skąd: $x = 0{,}077678.$

Zadanie 7-me. Obliczyć wartość:

$$x = (0{,}082)^{1{,}53}$$

Stąd mamy: $Log\ x = 1{,}53 \times Log\ 0{,}082 = 1{,}53 \times \bar{2}{,}91381.$

W przypadkach podobnych temu, jaki mamy przed oczyma, gdzie wypada logarytm z cechą ujemną i mantysą dodatnią mnożyć przez wyrażenie złożone (tutaj przez 1,53), najdogodniejszą będzie rzeczą, dla uniknięcia pomyłek, zamienić najprzód logarytm na całkowicie ujemny, następnie wykonać mnożenie, i potem, przeszedłszy znowuż do logarytmu z cechą ujemną i mantysą dodatnią, znaleść ostateczny wypadek. W obecnym przypadku mieć będziemy:

$$Log\ x = 1{,}53 \times (-1{,}08619),$$

stąd, wykonywając mnożenie:

$$Log\ x = -1{,}66187 = \bar{2}{,}33813,$$

i nakoniec: $x = 0{,}021783.$

485. Za pomocą tablic logarytmowych można także rozwiązywać równania wykładnicze w niektórych szczególnych przypadkach. Równanie wykładnicze postaci:

$$a^x = b,$$

gdzie a i b są danemi liczbami, może być zawsze rozwiązane. W tym celu należy wziąć logarytmy obu stron tegoż równania; będzie:

$$x\ Log\ a = Log\ b,$$

skąd: $$x = \frac{Log\ b}{Log\ a}.$$

Tak np. przypuśćmy, że mamy do rozwiązania równanie:

$$(0{,}826)^x = 2{,}88.$$

Biorąc logarytmy obu stron otrzymujemy:

$$x\ Log\ 0{,}826 = Log\ 2{,}88,$$

skąd: $$x = \frac{Log\ 2{,}88}{Log\ 0{,}826} = \frac{0{,}45939}{-0{,}08302}.$$

Ponieważ mamy tutaj wykonać dzielenie przez $Log\ 0{,}826$, przeto musimy wyrazić logarytm ten pod postacią logarytmu całkowicie ujemnego. Oczywiście dzielenie wskazane 0,45939 przez $-0{,}08302$ możemy znowuż wykonać za pomocą logarytmów; lecz ponieważ liczby ujemne nie mają logarytmów, przeto wykonywamy działanie tak, jak gdyby wszystkie dane liczby były dodatnie, a następnie przed wypadkiem piszemy znak właściwy. Wykonywając wskazane dzielenie, znajdziemy ostatecznie:

$$x = -5{,}5335.$$

Można jeszcze za pomocą logarytmów rozwiązywać równania z niewiadomą, wchodzącą do wykładnika, nieco więcej złożone, jak podane wyżej; niektóre z takich równań podajemy w zadaniach.

PRZYKŁADY XLIII.

1) Czemu się równać będą logarytmy liczb: 9, 81, 729 6561, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{243}$ przy zasadzie 3?

2) Czemu się równać będą logarytmy tychże samych liczb przy zasadzie *a)* 9; *b)* $\frac{1}{3}$?

3) Czemu się równać będą logarytmy liczb: $\frac{9}{25}$, $\frac{27}{125}$, $\frac{81}{625}$ przy zasadzie: *a)* $\frac{3}{5}$, *b)* $\frac{5}{3}$?

4) Pomiędzy jakiemi liczbami całkowitemi są zawarte logarytmy liczb: 5, 10, 32, 82, 215, 713, 1295, gdy za zasadę układu logarytmów przyjmiemy *a)* 6; *b)* 9?

5) Znaleść logarytmy następujących wyrażeń:

a) $Log\left[\frac{(p+q)^x}{(r+s)^{y-s}}\right]$; *b)* $Log\left[\frac{\sqrt[p]{a+b}\,.\,\sqrt[p]{ab}}{\sqrt[p+q]{a-b}\,.\,\sqrt[pq]{\frac{a}{b}}}\right]$;

$$c)\quad Log\left[2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}\right].$$

6) Wiedząc, że logarytmy naturalne liczb: 2, 3, 10 są: 0,69314718 ; 1,09861229 ; 2,30258509, znaleść logarytmy zwyczajne tychże liczb.

7) Znaleść z tablic logarytmy następujących liczb: 1889 ; 18,89 ; 188900 ; 0,01889 ; 4345 ; 4345,1 ; 4345,2 ; 4345,3 ; 43450 ; 43451 ; 43452 ; 0,052173.

8) Z następujących równań znaleść wartość na x, *bez użycia* tablic:

a) $Log\, x = 2$; *b)* $Log\, x = 3$; *c)* $Log\, x = 0{,}5$; *d)* $Log\, x = -\frac{5}{2}$; $\left(\text{Odpow. } \frac{1}{\sqrt{10^5}}\right)$; *e)* $Log\, x = Log\, a - Log\, b$; *f)* $Log\, x = n\; Log\, a + n\; Log\, b$; *g)* $Log\, x = 3\; Log\, 18 - 4\; Log\, 12$; $\left(\frac{9}{32}\right)$.

Obliczyć za pomocą tablic logarytmowych wartości następujących wyrażeń:

9) $8{,}759 : 0{,}05764$; 10) $\frac{4{,}3956 \times 0{,}73654}{11{,}563}$;

11) $(8{,}0952)^{-3}$; 12) $\left(\frac{3390 \times 4{,}3472}{13814}\right)^{\frac{1}{3}}$; 13) $\sqrt[7]{0{,}066473}$

14) $\sqrt[4]{0{,}47\sqrt{\frac{19}{34}}}$; 15) $\sqrt[4]{1{,}84 + \sqrt[5]{31}}$;

(Należy najprzód obliczyć $\sqrt[5]{31}$, liczbę stąd otrzymaną dodać do 1,84 i t. d.)

Rozwiązać następujące równania:

$$16)\quad (0{,}35)^x = 54{,}8\,.$$

17) $4^{x+2} = 60$; (należy wziąć logarytmy obu stron; podstawić zamiast Log 4 i Log 60 ich wartości z tablic; otrzymamy równanie stopnia pierwszego).

18) $10^{(5-x)\,(6-x)} = 100$; 19) $ab = \sqrt[x]{c}$; 20) $8^{2x} - 9\,.\,8^x + 20 = 0$; (oznaczywszy: 8^x przez y i podstawiwszy w dane równanie, otrzymamy równanie stopnia 2-go i t. d.)

Rozwiązać następujące równania z dwiema niewiadomemi:

20) $Log\, x + Log\, y = 2$; $5x^2 - 3y^2 = 1925$.

(Z pierwszego równania należy najprzód znaleść xy i t. d.)

XLIV.

Procenty.

486. *Procentem* nazywamy wynagrodzenie, płacone za użycie wypożyczonych pieniędzy. Pieniądze wypożyczone nazywamy *kapitałem*. Sumę kapitału wraz z procentem, należnym za pewien przeciąg czasu, nazywać będziemy sumą, na którą zamienia się dany kapitał po upływie tegoż czasu, albo krócej *sumą*.

Procent może być dwojaki: *prosty* i *złożony*. Gdy procent rachuje się zawsze od samego kapitału początkowego, wtedy nazywamy go *prostym*; lecz jeżeli procent należny, w chwili gdy przypada jego wypłata, dołączamy do kapitału i w następstwie procent rachujemy od całej sumy, wtedy nazywamy go *złożonym*.

Stopą procentu nazywamy kwotę, płaconą za użycie pewnej oznaczonej ilości pieniędzy przez pewien oznaczony czas. W *praktyce* tą ilością pieniędzy jest zwykle 100 rb., a czas jeden rok. Gdy więc mówimy, że stopa procentu jest 4 od sta ($4^0/_0$), to znaczy, że za użycie 100 rubli przez ciąg jednego roku płacimy 4 rb. W *teoryi* dogodną jest rzeczą, jak to zaraz zobaczymy, używać osobnego znaku dla oznaczenia procentu od *jednego* rubla za jeden rok.

487. *Znaleść sumę, na którą się zamieni dany kapitał po upływie danego czasu przy procencie prostym.*

Niech K oznacza liczbę rubli, zawartą w kapitale, n liczbę lat, r procent od jednego rubla za jeden rok, wyrażony w ułamku rubla, i M sumę szukaną, wyrażoną w rublach. Ponieważ r jest procentem od jednego rubla za rok, przeto Kr jest procentem od K rubli za rok, a $n\ Kr$ jest procentem od K rubli za n lat; będzie więc:

$$M = K + nKr = K(1 + nr).$$

Z równania $M = K(1 + nr)$, można znaleść jednę z czterech ilości M, K, n, r, gdy trzy inne są dane. I mianowicie:

$$K = \frac{M}{1 + nr}; \quad n = \frac{M - K}{Kr}; \quad r = \frac{M - K}{Kn}.$$

488. *Znaleść sumę, na którą się zamieni dany kapitał, po upływie danego czasu przy procencie złożonym.*

Niech K oznacza liczbę rubli kapitału, n — liczbę lat, r — procent od jednego rubla za rok, wyrażony w ułamku rubla, i M — liczbę rubli, zawartą w szukanej sumie. Oznaczmy nadto przez R sumę, na którą się zamieni jeden rubel po upływie jednego roku; wtedy $R = 1 + r$. Zatem KR będzie sumą, na którą się zamieni K rubli w ciągu jednego roku. Więc suma, na którą się zamieni KR rubli w ciągu także jednego roku, będzie KRR, czyli KR^2; to ostatnie zatem wyrażać będzie sumę, na którą się zamieni K rubli w ciągu *dwóch* lat. Podobnież suma, na którą się zamieni KR^2 rubli w ciągu roku będzie: KR^2R, czyli KR^3; i to będzie sumą, na którą się zamieni kapitał K rubli po upływie *trzech* lat.

Postępując dalej tym samym sposobem znajdziemy, że suma na którą się zamieni kapitał K rubli, po upływie n lat będzie KR^n, więc:

$$M = KR^n.$$

Sam procent za przeciąg tych n lat wynosi:

$$KR^n - K = K(R^n - 1).$$

489. *Wartość teraźniejsza*, czyli *obecna*, pewnej sumy, mającej być wypłaconą na końcu danego czasu, jest to ten kapitał, który wraz ze swoim procentem za uważany przeciąg czasu zamieni się na tęż sumę. Przy oznaczeniach powyżej przyjętych, K jest wartością teraźniejszą sumy M.

Dyskontem (potrącenie procentu) nazywamy wynagrodzenie za wypłacenie sumy należnej przed tym terminem, w którym ona miała być wypłaconą.

Z określenia *wartości teraźniejszej* wypada, że dług, mający być zapłaconym w pewnym oznaczonym terminie, jest w zupełności pokryty przez wypłacenie wcześniej jego *wartości teraźniejszej*, odpowiedniej chwili, w której następuje wypłata. Stąd dyskonto jest równe różnicy pomiędzy sumą płatną w oznaczonym terminie, a jej wartością teraźniejszą.

490. *Znaleść wartość obecną sumy płatnej na końcu danego czasu i dyskonto.*

Niech K będzie liczbą rubli, wyrażających wartość teraźniejszą, n liczbą lat, r procentem od jednego rubla za jeden rok, wyrażonym w ułamku rubla, M liczbą rubli, oznaczających sumę należną, i D dyskontem. Nadto niech będzie:

$$R = 1 + r.$$

Wtedy: przy procencie prostym:

$$M = K(1 + nr), \ \S\, 487;$$

skąd: $$K = \frac{M}{1+nr};\ D = M - K = \frac{Mnr}{1+nr}.$$

Przy procencie złożonym:

$$M = KR^n, \qquad \S\, 488;$$

skąd: $$K = \frac{M}{R^n};\ D = M - K = \frac{M(R^n - 1)}{R^n}.$$

491. W praktyce zwykłą jest rzeczą zamiast *dyskonta* tak określonego, jak było tutaj wyżej podane, brać *procent* od całej sumy, wypłaconej przed terminem. Tak naprzykład, przy procencie prostym, zamiast $\frac{Mnr}{1+nr}$, płacący otrzyma Mnr jako wynagrodzenie za natychmiastową wypłatę.

492. *Na początku każdego roku do kasy wnosimy na procent K rb.; znaleść, na jaką sumę zamienią się wszystkie wniesione raty po upływie n lat przy procencie złożonym.*

Oznaczmy przez M szukaną sumę, r procent roczny od jednego rubla, wyrażony w ułamku rubla, i nakoniec uczyńmy $R = 1 + r$. Oczywistą jest rzeczą, że rata K, oddana na początku pierwszego roku do kasy, pozostanie na procencie przez przeciąg n lat; podług wzoru § 488 zamieni się więc na sumę KR^n; także sama rata K, oddana do kasy na początku drugiego roku, pozostanie na procencie $n - 1$ lat, zamieni się więc na sumę KR^{n-1}; podobnież trzecia rata K, oddana na początku trzeciego roku, pozostanie na procencie przez $n - 2$ lata, zamieni się przeto na sumę KR^{n-2}; i tak dalej; — ostatnia rata K, oddana na początku n-tego roku, zamieni się na końcu tegoż roku na sumę KR. Całkowita więc wartość złożonych rat po upływie n lat będzie sumą wyrazów postępu ilorazowego:

$$KR^n,\ KR^{n-1},\ KR^{n-2} \ldots\ldots KR;$$

czyli będzie:

$$M = KR^n + KR^{n-1} + KR^{n-2} + \ldots\ldots + KR.$$

Na zasadzie wzoru (1) § 455 otrzymamy ostatecznie:

$$M = \frac{KR^{n+1} - KR}{R - 1},$$

czyli $$M = KR.\frac{R^n - 1}{R - 1}.$$

493. *Znaleść, jaką ratę należy płacić rocznie, aby umorzyć w przeciągu n lat kapitał wypożyczony i jego procenty złożone.*

Przypuśćmy, że dzisiaj zaciągamy pożyczkę K rubli, którą chcemy umorzyć w ciągu n lat, przez wypłacanie równych rat na końcu każdego roku. Oznaczmy procent od jednego rubla na rok, wyrażony w ułamku rubla, przez r, przez a — ratę roczną, i uczyńmy $R = 1 + r$. Wtedy kapitał K oczywiście zamieni się po upływie n lat na sumę KR^n; suma wszystkich rat rocznych, wraz z ich procentami złożonymi, powinna równać się KR^n. Stąd otrzymujemy równość:

$$KR^n = aR^{n-1} + aR^{n-2} + \ldots\ldots + aR + a,$$

czyli: $$KR^n = a\frac{R^n - 1}{R - 1}.$$

Z równości tej znajdziemy z łatwością a. Taż sama równość służyć będzie i do rozwiązania innych jeszcze zagadnień, odnoszących się do rocznych wypłat.

494. Do rozwiązywania zadań na procenty składane mogą być używane tablice logarytmowe. Podług § 488 główny wzór na procenty składane jest:

$$M = K.R^n,$$

gdzie K oznacza kapitał początkowy, M sumę na którą on zamieni się po upływie lat n, R zaś jest równe $1 + r$; gdzie r jest procentem od jednostki kapitału za jeden rok. Biorąc logarytmy obu stron, otrzymamy:

$$Log\ M = Log\ K + n\ Log\ R\ , \ldots (1)$$

równanie, które daje nam odpowiedź na te wszystkie pytania, jakie się odnoszą do wzoru głównego. Mianowicie: równanie (1) bezpośrednio daje nam odpowiedź na to pytanie: na co się zamieni dany kapitał K po upływie n lat przy procencie składanym po 100 r od sta na rok. Gdyby było wiadome M, R i n, a szukane K, wtedy otrzymalibyśmy:

$$Log\ K = Log\ M - n\ Log\ R. \ldots . (2)$$

Gdyby były wiadome M, K i n, a szukana stopa procentu, wtedy mielibyśmy:

$$Log\ R = \frac{Log\ M - Log\ K}{n} \ldots . (3)$$

Za pomocą tego wzoru znaleźlibyśmy R to jest $1 + r$; odejmując od znalezionej wartości 1, i mnożąc wypadek przez 100, otrzymalibyśmy procent od sta na rok.

Nakoniec gdybyśmy chcieli znaleść n z wiadomych M, K i R, wtedy byłoby:

$$n = \frac{Log\ M - Log\ K}{Log\ R} \ldots . (4).$$

Należy jednak zwrócić uwagę tutaj, że przy pomocy tablic logarytmowych pięciocyfrowych, tylko zadania o procentach składanych z małemi stosunkowo liczbami mogą być ściśle rozwiązane. Większa część zadań, odnoszących się do procentów składanych, wymaga tablic logarytmowych o znacznie większej liczbie cyfr dziesiętnych: tu należą np. zagadnienia o umarzaniu pożyczek. Zagadnienie, często zadawane, na jaką sumę zamieniłby się jeden grosz, oddany na procent składany w roku narodzenia się Chrystusa do daty obecnej, które teoretycznie rozwiązuje się bardzo prosto za pomocą wzoru (1), wymaga do ścisłego obliczenia umiejętności obrachowania logarytmów do znacznej liczby cyfr dziesiętnych, i następnie z wiadomego logarytmu wynalezienia samej liczby. Rachunki takie przechodzą po za obręb wykładu początkowego.

PRZYKŁADY XLIV.

1. Na jaką sumę zamieni się kapitał wynoszący 17500 rb. przy procencie złożonym $4^0/_0$ po upływie 36 lat?

2. Jaki kapitał zamieni się po upływie 10 lat, przy procencie składanym $4\frac{1}{2}{}^0/_0$, na sumę 14595 rb.?

3. Na jaki procent trzeba wypożyczyć kapitał 36740 rb. ażeby on zamienił się po 15 latach na 79000 rb.?

4. Po ilu latach kapitał 17190 rb., przy procencie składanym $4\frac{3}{4}{}^0/_0$ zamieni się na 60177 rb.?

5. Po ilu latach potroi się kapitał przy procencie składanym $4\frac{1}{2}{}^0/_0$?

6. Na początku każdego roku do kasy wnosimy 125 rb.; znaleść, na jaką sumę zamienią się wszystkie wniesione raty po upływie 12 lat przy procencie złożonym $5^0/_0$?

7. Znaleść, jaką ratę należy płacić rocznie, ażeby umorzyć w przeciągu 25 lat kapitał 10000 rb. i jego procenty złożone przy stopie procentu $4\frac{1}{2}{}^0/_0$?

XLV.

Przemiany, przestawienia i połączenia.

495. *Przemianami* (waryacyami) nazywamy różne sposoby, jakimi może być ustawiany pewien zbiór przedmiotów.

Tak naprzykład przemianami z trzech głosek a, b, c, branych po dwie na raz, będą: ab, ba, ac, ca, bc, cb.

Połączenia tych samych przedmiotów, różniące się tylko porządkiem, w którym są one ustawione, nazywają się *przestawieniami* (permutacye).

Tak np. z trzech głosek a, b, c przestawienia będą: abc, acb, bac, bca, cba, cab.

496. *Połączeniami* w ściślejszem znaczeniu tego wyrazu (kombinacyami) są takie ustawienia pewnego zbioru przedmiotów, w których nie zwracamy uwagi na porządek, w jakim stoją obok siebie przedmioty.

Tak naprzykład z trzech głosek a, b, c (oznaczających pewne przedmioty), branych po dwie na raz, połączenia będą ab, ac, bc; zbiory ab i ba, będące różnemi *przestawieniami* dwóch przedmiotów a i b, tworzą jedno *połączenie* (*jednę kombinacyę*), podobnież zbiory ac i ca także tworzą jedno *połączenie*, również bc i cb [1].

497. *Liczba przemian* (*waryacyi*) *z n przedmiotów, branych po r na raz, jest równą:*

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1).$$

Niech będzie n głosek a, b, c, d ..... przedstawiających tyleż przedmiotów. Znajdziemy najprzód liczbę przemian z tych głosek, branych po dwie na raz. W tym celu umieśćmy a przed każdą z pozostałych głosek; otrzymamy tym sposobem $n-1$ przemian, w których a znajduje się na pierwszem miejscu. Umieśćmy następnie b przed każdą z pozostałych głosek; otrzymamy tym sposobem $n-1$ przemian, zaczynających się od b. W podobny sposób znajdziemy $n-1$ przemian, z których każda zaczyna się od c. I tak dalej. Więc wszystkich przemian z n głosek, branych po *dwie* na raz, będzie: $n(n-1)$. Znajdziemy teraz liczbę przemian z tych n głosek, branych po *trzy* na raz. Pokazaliśmy dopiero co, że z n głosek możemy utworzyć $n(n-1)$ przemian z których każda zawiera po dwie głoski; zatem z $n-1$ głosek b, c, d ..... możemy utworzyć $(n-1)(n-2)$ przemian, biorąc te głoski po dwie na raz. Utworzywszy te $(n-1)(n-2)$ przemian z głosek b, c, d ..... umieśćmy następnie głoskę a przed każdą z tych przemian; otrzymamy tym sposobem $(n-1)(n-2)$ przemian, zawierających po trzy głoski, i w których a znajduje się na pierwszem miejscu. Podobnież będzie $(n-1)(n-2)$ przemian, zawierających po trzy głoski i zaczynających się każda od b. Podobnież tyleż będzie takich przemian, zaczynających się od c. I tak dalej. Ostatecznie więc wszystkich przemian z n głosek, branych po trzy na raz, będzie: $n(n-1)(n-2)$. Z rozważania tych i tym podobnych przypadków możnaby się domyślać, że liczba przemian z n głosek, branych po r na raz, będzie:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1);$$

i pokażemy, że tak jest w rzeczy samej. Przypuśćmy bowiem że już jest wiadome, iż liczba przemian z n głosek, branych po $r-1$ na raz, jest:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\{n-(r-1)+1\};$$

dowiedziemy, że podobny wzór wyrażać będzie i liczbę przemian z n głosek, branych po r na raz. Gdyż z $n-1$ głosek b, c, d ..... możemy podług założenia utworzyć: $(n-1)(n-2)\ldots\ldots\{n-1-(r-1)+1\}$ przemian, każda po $r-1$ głosek; — umieśćmy a przed każdą z tych przemian, a otrzymamy tyleż przemian, zawierających po r głosek, i zaczynających się od a. Podobnież taka sama będzie liczba przemian, zawierających po r głosek, i zaczynających się od b. I jeszcze także sama będzie liczba przemian, zawierających po r głosek, i zaczynających się każda od c. I tak dalej. Ostatecznie więc liczba przemian z n głosek, branych po r na raz, będzie:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1).$$

[1] Głoski, służące do oznaczenia przedmiotów łączonych nazywają się w tej części algebry, którą zajmuje się niniejszy rozdział, *elementami*.

Jeżeli zatem wzór ten ma miejsce, gdy bierzemy po $r-1$ głosek na raz, to mieć on będzie miejsce i wtedy, gdy bierzemy po r głosek na raz. Lecz ponieważ widzieliśmy, iż ma on miejsce wtedy, gdy bierzemy po *trzy* głoski na raz, przeto wypada z powyższego dowodzenia, że ma on miejsce i wtedy, gdy bierzemy po *cztery* głoski, a zatem ma miejsce i wtedy, gdy bierzemy po pięć głosek na raz, i tak dalej. Zatem jest on ogólnym.

498. Z tego wzoru wypada, że liczba *przestawień* z n głosek, to jest liczba przemian z n głosek, branych wszystkie na raz, jest równą $n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,3\,.\,2\,.\,1$.

Dla krótkości iloczyn $n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,1$ często oznacza się tak: $\underline{|n}$, lub też $n!$ (n z wykrzyknikiem); tym sposobem znak $\underline{|n}$, lub $n!$ oznacza iloczyn szeregu liczb naturalnych od 1 do n włącznie. Symbol $n!$ można czytać tak: *fakultet n.*

499. *Każde połączenie (kombinacya) z r przedmiotów daje* $\underline{|r}$ *lub r! przestawień (permutacyi).*

Gdyż podług § 498 te r przedmiotów może być przestawionych w $\underline{|r}$ różnych sposobów.

500. *Liczba połączeń (kombinacyi) z n przedmiotów, branych po r na raz, jest:*

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-r+1)}{r!}$$

Gdyż liczba *przemian* z n przedmiotów, branych po r na raz, jest $n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,,(n-r+1)$ na zasadzie § 497; każde zaś *połączenie* (kombinacya) tworzy $r!$ przestawień podług § 499, przeto liczba połączeń musi być równą:

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-r+1)}{r!}$$

Jeżeli licznik i mianownik tego wyrażenia pomnożymy przez $(n-r)!$, wtedy przyjmie ono postać:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

nie zmieniając, rozumie się, swojej wartości.

501. *Znaleść liczbę przestawień (permutacyi) z n przedmiotów, które nie wszystkie są różne.*

Niech będzie danych n głosek: i przypuśćmy, że w tych n głoskach a wchodzi p razy, b wchodzi q razy, c wchodzi r razy, pozostałe zaś d, e . . . . . wchodzą każda raz tylko jeden. Wtedy liczba przestawień (permutacyi) z tych głosek będzie:

$$\frac{n!}{p!\;q!\;r!}\,.$$

W rzeczy samej: oznaczmy liczbę szukaną tych przestawień głoską N. Gdyby w któremkolwiek z tych przestawień p głosek a zostało zmienionych na p nowych głosek, różnych od siebie, wtedy, *nie zmieniając położenia żadnej z innych głosek*, moglibyśmy utworzyć z tego jednego przestawienia $p!$ przestawień różnych: gdyby więc p głosek a zostało zamienionych na p nowych i różnych głosek, wtedy liczba wszystkich przestawień byłaby: $N \times p!$. Podobnież: gdyby q głosek b zostało zamienionych na q nowych i różnych od siebie głosek, wtedy całkowita liczba przestawień, jaką teraz moglibyśmy otrzymać, byłaby $N \times p! \times q!$. I jeżeliby r głosek c zostało również zamienionych na r nowych i różnych od siebie głosek, wtedy całkowita liczba przestawień byłaby: $N \times p! \times q! \times r!$. Lecz ta liczba musi być równą liczbie przestawień z n głosek różnych (§ 498), to jest $n!$.

Zatem: $N \times p! \times q! \times r! = n!$; a stąd:

$$N = \frac{n!}{p!\,q!\,r!}.$$

I w takiż sam sposób można postępować w każdym innym podobnym przypadku.

PRZYKŁADY XLV.

1. Z oddziału, zawierającego 24 ludzi, ile można utworzyć oddziałów małych po 6 ludzi?

2. Znaleść ile można utworzyć przestawień (permutacyi) ze wszystkich liter, stanowiących wyraz *Sulejów?*

3. Znaleść ile można utworzyć połączeń (kombinacyi) z liter wyrazu: „*granitowy*“, branych po cztery na raz?

4. Z dwudziestu spółgłosek i pięciu samogłosek ile można utworzyć wyrazów, z których każdy byłby złożony z dwóch spółgłosek i jednej samogłoski w ten sposób, że samogłoska zajmuje w każdym z nich środkowe miejsce?

5. Osada łodzi, składająca się z ośmiu wioślarzy i jednego sternika, ma być wybraną z pomiędzy dwunastu osób, z których dziewięć może tylko wiosłować, a trzy mogą sterować, ale nie mogą wiosłować. Znaleść iloma sposobami osada może być utworzoną z tych dwunastu osób.

6. Na płaszczyznie obieramy n punktów a, b, c . . . . . w ten sposób, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej linii prostej, i łączymy je z sobą po dwa liniami prostemi ab, ac, bc.... Linie te przecinają się z sobą w nowych punktach A, B, C.... Znaleść liczbę N tych ostatnich punktów przecięcia.

7. Ile może być liczb dziesięciocyfrowych takich, których wszystkie cyfry są różne?

Uwaga. Biorąc pod uwagę jakikolwiek wyraz, zdanie, lub wiersz, w ogóle jakiekolwiek wyrażenie, i tworząc z głosek, stanowiących to wyrażenie, wszystkie przestawienia (permutacye), otrzymywać będziemy nowe układy głosek, z których jedne mieć będą w pewnym języku znaczenie, inne zaś będą bez żadnego znaczenia, a nawet nie będą mogły być wymówione. Zwykle pierwsze nazywają *anagramami* względem początkowego wyrażenia. Niektóre anagramy mają sławę historyczną. Tak np. z wyrazów „*Révolution française*“ po upadku Napoleona za restauracyi, ułożono anagram: „*La France veut son roi*“. Z nazwiska: „*Frère Jacques Clément*“ (zabójcy Henryka III-go), złożono: „*C'est l'enfer qui m'a créé*“. Jeden z najpiękniejszych przykładów takich anagramów, mający związek z naszą historyą, stanowi przedmiot zagadnienia następującego:

8. Gdy młody Stanisław Leszczyński powrócił za życia ojca do Leszna z długiej podróży za granicą, wówczas w tem mieście zgromadziła się cała rodzina Leszczyńskich w celu powitania przyszłej głowy możnego domu. Ówczesny Rektor szkoły jezuickiej w Lesznie, Jabłoński, chcąc przyczynić się do uświetnienia uroczystości, urządził dyalog, odegrany przez uczniów, po którym 13 uczniów, przebranych za bohaterów, odtańczyło balet. Każdy z nich miał na tarczy jednę z liter stanowiących wyrazy: „ Domus Lescinia“, złotem wymalowaną. Po każdej figurze baletu tańczący ustawiali się w ten sposób, że litery na tarczach tworzyły anagramy z wyrazów powyższych. I tak po pierwszym balecie czytano na tarczach obok siebie ustawionych: „Domus Lescinia“; po drugim tarcze tak się ustawiły, że czytano: „ades incolumis“. Po trzecim: „omnis es lucida“; po czwartym: „lucida sis omen“; po piątym: „mane sidus loci“; po szóstym: „sis columna Dei“; i nakoniec po siódmym: „I! scande solium“ (idź, wstąp na tron; jak wiemy, sprawdziło się to później). Znaleść 1-sze; ile może być wszystkich przestawień (permutacyi) z liter: „Domus Lescinia“: 2-re przypuszczając, że na utworzenie każdej nowej permutacyi powyższych głosek, chłopcy potrzebowali tylko $\frac{1}{2}$ minuty, w jakim przeciągu czasu wyczerpaliby te wszystkie permutacye; i po 3-ie ile papieru potrzebaby było na napisanie wszystkich permutacyi, gdyby w jednym wierszu można napisać cztery takie permutacye, i gdyby na stronie całego arkusza zmieściło się 40 wierszy?

XLVI.

Dwumian Newtona.

502. Widzieliśmy już, że $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$ i że $(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$; przedmiotem teraźniejszego rozdziału będzie wynalezienie ogólnego wyrażenia na $(x+a)^n$, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą całkowitą i dodatnią.

503. Przez wykonanie mnożeń znajdziemy:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + \\ + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + \\ + (abc+bcd+cda+dab)x + abcd.$$

Rozważając otrzymane wypadki z tych mnożeń, dochodzimy do wniosku, że są one utworzone podług następujących prawideł:

I. Liczba wyrazów, znajdujących się z prawej strony znaku równości, jest o jedność większą od liczby mnożonych dwumianów.

II. Wykładnik przy x w pierwszym wyrazie jest równy liczbie mnożonych dwumianów, a w każdym innym wyrazie wykładnik przy x jest o jedność mniejszy, aniżeli tenże wykładnik w wyrazie poprzedzającym.

III. Współczynnik wyrazu pierwszego jest równy jedności; współczynnik wyrazu drugiego jest sumą drugich głosek mnożonych dwumianów; współczynnik wyrazu trzeciego jest sumą iloczynów drugich głosek mnożonych dwumianów, branych po dwie na raz; współczynnik wyrazu czwartego jest sumą iloczynów drugich głosek mnożonych dwumianów, branych po trzy na raz; i tak dalej; — ostatni

wyraz jest iloczynem wszystkich drugich głosek mnożonych dwumianów.

Pokażemy teraz, że te prawidła są ogólne, to jest mają miejsce, jakakolwiek byłaby liczba mnożonych dwumianów. W tym celu przypuśćmy, że one mają miejsce dla iloczynu, powstałego z pomnożenia $n-1$ dwumianów: to jest przypuśćmy, że mamy $n-1$ czynników $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... $x+k$, i że:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+k) = x^{n-1} + px^{n-2} + \\ + qx^{n-3} + rx^{n-4} + \ldots\ldots + u,$$

gdzie: $p =$ sumie głosek $a, b, c, \ldots\ldots k$;

$q =$ sumie iloczynów z tychże głosek, branych po dwie na raz;

$r =$ sumie iloczynów z tychże głosek, branych po trzy na raz;

. . . .

$u =$ iloczynowi tych wszystkich głosek.

Pomnóżmy obie strony tej równości tożsamościowej przez nowy czynnik $(x+l)$, i uporządkujmy iloczyn na drugiej stronie podług potęg głoski x. Będzie:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+k)(x+l) = x^n + \\ + (p+l)x^{n-1} + (q+pl)x^{n-2} + \\ + (r+ql)x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + ul.$$

Lecz: $p + l = a + b + c + \ldots\ldots + k + l =$ sumie wszystkich głosek $a, b, c, \ldots. k, l$;

$q + pl = q + l(a + b + c + \ldots\ldots + k) =$ sumie iloczynów wszystkich głosek a, $b, c, \ldots\ldots k, l$, branych po dwie na raz;

$r + ql = r + l(ab + ac + bc \ldots\ldots) =$ sumie iloczynów wszystkich głosek $a, b, c \ldots$ $\ldots. k, l$, branych po trzy na raz;

. . . .

$ul =$ iloczynowi wszystkich głosek.

Stąd, jeżeli te prawidła mają miejsce, gdy mnożymy $n - 1$ czynników, wtedy to, co było wyżej powiedziane, pokazuje nam, że mają one miejsce i wówczas, gdy pomnożymy n czynników. Lecz widzieliśmy, że one mają miejsce przy tworzeniu iloczynu z *czterech* czynników: przeto podług nich jest utworzony i iloczyn z *pięciu* czynników i tak dalej: mają one więc miejsce w ogólności.

Wypadek ogólny z pomnożenia n czynników dwumiennych napiszemy dla krótkości w ten sposób:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+k)(x+l) = x^n + Px^{n-1} + \\ + Qx^{n-2} + Rx^{n-3}\ldots\ldots + V.$$

Na drugiej stronie powyższej równości P oznacza sumę głosek $a, b, c, \ldots\ldots k, l$, których liczba jest n; Q oznacza sumę iloczynów z tychże głosek, branych po dwie na raz: — liczba tych iloczynów jest $\frac{n(n-1)}{1.2}$; R jest sumą $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ podobnych iloczynów, i tak dalej. Patrz § 500.

Przypuśćmy teraz, że każda z głosek $b, c, \ldots\ldots k, l$, staje się równą a. Wtedy pierwsza strona powyższej równości zamieni się na $(x+a)^n$. P zamieni się na na, Q zamieni się na $\frac{n(n-1)}{1.2}a^2$, R zamieni się na $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3$, i tak dalej. Będzie więc ostatecznie:

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^4x^{n-4} + \ldots\ldots + a^n.$$

504. Wzór, który teraz otrzymaliśmy, nazywa się *dwumianem Newtona*, od nazwiska wielkiego matematyka angielskiego, który go pierwszy w tej postaci ogólnej podał. Szereg na drugiej stronie znaku równości nazywa się *rozwinięciem* dwumianu $(x+a)^n$, a gdy zamiast $(x+a)^n$ piszemy ten szereg, mówimy, że $(x+a)^n$ *rozwijamy*.

Zwracamy tutaj uwagę na to, że twierdzenie powyższe zostało dowiedzione w tym tylko przypadku, gdy n jest liczbą *całkowitą i dodatnią*, a sposób, jakiego do dowiedzenia użyliśmy, przedstawia nam przykład *indukcyi matematycznej*.

505. Weźmy jako przykład $(x+a)^6$. Tutaj $n=6$.

$$\frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{6.5}{1.2} = 15;\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20;$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15;$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} = \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 6;$$

przeto:

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

Przypuśćmy dalej, że chcemy znaleść rozwinięcie $(b^2+cy)^6$; w tym celu należy tylko podstawić b^2 zamiast x i cy zamiast a w poprzedniej równości. Otrzymamy:

$$(b^2+cy)^6 = (b^2)^6 + 6cy(b^2)^5 + 15(cy)^2(b^2)^4 + 20(cy)^3(b^2)^3 + \\ + 15(cy)^4(b^2)^2 + 6(cy)^5b^2 + (cy)^6 = \\ = b^{12} + 6cyb^{10} + 15c^2y^2b^8 + 20c^3y^3b^6 + \\ + 15c^4y^4b^4 + 6c^5y^5b^2 + c^6y^6.$$

Jako dalszy przykład zadajmy sobie, znaleść rozwinięcie $(x-c)^n$; należy w tym celu we wzorze § 503 podstawić $-c$ zamiast a; otrzymamy:

$$(x-c)^n = x^n - ncx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}c^2x^{n-2} - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}c^3x^{n-3} + \ldots\ldots$$

Podstawmy teraz w rozwinięciu $(x+a)^n$ jedność (1) zamiast x, znajdziemy:

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3\ldots\ldots$$

a ponieważ równość ta jest prawdziwą przy każdej wartości na a, przeto możemy w niej napisać x zamiast a, i będzie:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

506. Dwumian Newtona można zastosować także do rozwinięcia wyrażeń, zawierających więcej niż dwa wyrazy. Przypuśćmy naprzykład, że chcemy rozwinąć $(1 + 2x - x^2)^4$. Uczyńmy $y = 2x - x^2$; wtedy mieć będziemy:

$(1 + 2x - x^2)^4 = (1 + y)^4 = 1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4$, czyli:

$$(1 + 2x - x^2)^4 = 1 + 4(2x - x^2) + 6(2x - x^2)^2 + \\ + 4(2x - x^2)^3 + (2x - x^2)^4.$$

Lecz:

$$(2x - x^2)^2 = (2x)^2 - 2(2x)x^2 + (x^2)^2 = 4x^2 - 4x^3 + x^4;$$

$$(2x - x^2)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 . x^2 + 3(2x)(x^2)^2 - (x^2)^3 = \\ = 8x^3 - 12x^4 + 6x^5 - x^6;$$

$$(2x - x^2)^4 = (2x)^4 - 4(2x)^3x^2 + 6(2x)^2(x^2)^2 - 4(2x)(x^2)^3 + \\ + (x^2)^4 = 16x^4 - 32x^5 + 24x^6 - 8x^7 + x^8.$$

Podstawiając te wartości w powyższe wyrażenie i robiąc wszystkie uproszczenia, otrzymamy ostatecznie:

$$(1 + 2x - x^2)^4 = 1 + 8x + 20x^2 + 8x^3 - 26x^4 - 8x^5 + \\ + 20x^6 - 8x^7 + x^8.$$

507. *W rozwinięciu $(1+x)^n$ współczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazu pierwszego i ostatniego są sobie równe.*

W samej rzeczy: współczynnik wyrazu stojącego na miejscu r od początku rozwinięcia (t. j. takiego, przed którym znajduje się wyrazów $(r-1)$, jest: $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!}$;

pomnożywszy licznik i mianownik tego wyrażenia przez $(n-r+1)!$, otrzymamy:

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

Wyraz, stojący na miejscu r od końca rozwinięcia, znajduje się na miejscu $(n - r + 2)$-giem, licząc od wyrazu pierwszego; jego współczynnik jest więc:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\{n-(n-r+2)+2\}}{(n-r+1)!}$$

to jest: $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots r}{(n-r+1)!}$;

po pomnożeniu licznika i mianownika tego ułamka przez $(r-1)!$ zamieni się on na:

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!},$$

a to jest wyrażenie współczynnika, znalezionego poprzednio.

508. *Suma wszystkich współczynników w rozwinięciu dwumianu $(1+x)^n$ jest równa 2^n.*

Jeżeli bowiem we wzorze:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 \ldots\ldots + x^n,$$

uczynimy $x = 1$, otrzymamy:

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \ldots + 1.$$

509. Dotąd, mówiąc o rozwinięciu dwumianu $(x+a)^n$, przyjmowaliśmy, że n oznacza *jakąkolwiek liczbę całkowitą i dodatnią*. Lecz wzór Newtona może być zastosowany do rozwinięcia $(x+a)^n$ i w tym przypadku, gdy n jest ułamkiem dodatnim, lub ilością ujemną, całkowitą lub ułamkową. Czytelnik w obszerniejszych dziełach o algebrze znajdzie zupełny rozbiór dwumianu Newtona, w zastosowaniu do jakiegokolwiek wykładnika. Uważamy jednak za ćwiczenie pożyteczne, podać uczącemu się sposoby otrzymania niektórych wypadków, w razie wykładnika ułamkowego lub ujemnego, z wzoru ogólnego. W tym celu przyjmiemy, jako rzecz wiadomą, że jakiekolwiek byłyby x, a i n, będzie zawsze:

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^2x^{n-2} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{n-3} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^4x^{n-4} + \ldots\ldots$$

Lecz w tym przypadku, gdy n nie jest liczbą całkowitą i dodatnią, szereg na drugiej stronie znaku równości staje się nieskończonym.

510. Jako przykład weźmy rozwinięcie $(1+y)^{\frac{1}{2}}$. W tym celu we wzorze § 509 podstawmy 1 zamiast x, y zamiast a, i $\frac{1}{2}$ zamiast n. Będzie:

$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\,.\,2} = -\frac{1}{8}.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{1}{16}.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} =$$

$$= -\frac{5}{128},$$

i tak dalej. Zatem:

$$(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 + \ldots\ldots$$

Jako inny przykład weźmy $(1+y)^{-\frac{1}{2}}$. Tutaj we wzorze § 509 należy podstawić: 1 za x, y zamiast a, i $-\frac{1}{2}$ zamiast n. Otrzymamy:

$$n = -\frac{1}{2};\ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} = \frac{3}{8};\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = -\frac{5}{16},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = \frac{35}{128};$$ i tak dalej. Przeto:

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \frac{35}{128}y^4 - \ldots\ldots$$

Jako dalszy przykład rozwińmy $(1+y)^{-m}$. Tutaj należy podstawić: 1 zamiast x, y zamiast a, i $-m$ zamiast n. Będzie:

$$n = -m;\ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} = \frac{m(m+1)}{1\,.\,2};$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = -\frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3};$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4};$$

i tak dalej.

Tym sposobem otrzymamy:

$$(1+y)^{-m} = 1 - my + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}y^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}y^3 +$$

$$+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}y^4\ldots\ldots$$

Jako szczególny przypadek uczyńmy $m=1$, wtedy będzie:

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - \ldots\ldots$$

Ten sam wypadek otrzymamy, dzieląc 1 przez $1+y$.

Rozwińmy jeszcze $(1+2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$ podług potęg rosnących głoski x. W tym celu uczyńmy $2x-x^2=y$, otrzymamy:

$$(1+2x-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1+y)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{16} y^3 - \frac{5}{128} y^4 + \ldots\ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(2x - x^2) - \frac{1}{8}(2x - x^2)^2 + \frac{1}{16}(2x - x^2)^3 -$$

$$- \frac{5}{128}(2x - x^2)^4 + \ldots\ldots$$

Wynajdźmy następnie wartości na $(2x - x^2)^2$, $(2x - x^2)^4$... podstawmy w powyższe wyrażenie, i zróbmy wszelkie redukcye; otrzymamy ostatecznie:

$$(1 + 2x - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + x - x^2 + x^3 - \frac{3}{2} x^4 + \ldots\ldots$$

PRZYKŁADY XLVI.

1. Napisać trzy pierwsze i trzy ostatnie wyrazy rozwinięcia: $(a - x)^{13}$.
2. Rozwinąć: $(1 - 2y)^7$.
3. Rozwinąć: $(1 - 2x + x^2)^4$.
4. Drugi wyraz w rozwinięciu $(x + y)^n$ jest 240, trzeci 720, a czwarty 1080; znaleść, czemu się równają x, y i n.
5. Rozwinąć: $(1 - 2x)^{-1}$.
6. Rozwinąć do pięciu wyrazów $(a - 3b)^{\frac{-10}{3}}$; pokazać, że gdy $a = 1$ i $b = \frac{1}{5}$, wtedy czwarty wyraz tego rozwinięcia jest większy, aniżeli wyraz trzeci i wyraz piąty, osobno wzięte.

Rozwiązania zadań.

I. **1.** 22. **2.** 26. **3.** 89. **4.** 274. **5.** 10. **6.** 6. **7.** 39. **8.** 9. **9.** 5.

II. **1.** 55. **2.** 81. **3.** 94. **4.** 81. **5.** 21. **6.** 3. **7.** 2. **8.** 127.

III. **1.** 5. **2.** 9. **3.** 224. **4.** 7. **5.** 8. **6.** 238. **7.** 144. **8.** 15. **9.** 2.

IV. **1.** 43. **2.** 2. **3.** 72. **4.** 16. **5.** 5. **6.** 5. **7.** 7. **8.** 2.

V. **1.** $15a - 9b$. **2.** $3x^2 - 3y^2$ **3.** $3x - 3a - 2b$. **4.** $2a + 2b$. **5.** $-2a + 2b + 2d$. **6.** $5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 9$. **7.** $6ab - 9a^2x + 7ax^2 + ax^3$. **8.** $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

VI. **1.** $3a + 4b$. **2.** $4a + 2c$. **3.** $2x^3 - 2x - 4$. **4.** $x^2 - ax + 2a^2$. **5.** $3x^3 + 4x + 16, x^3 + 8x^2$.

VII. **1.** a. **2.** $a + a^3$. **3.** $-2b + 2c$. **4.** $3c$. **5.** $4a - 16b - 2c$. **6.** $7x + 6$. **7.** $-8x^3 - 8x$.

VIII. **1.** $8x^5$. **2.** $12a^9$. **3.** $4a^3b^3$. **4.** $15x^7y^5z^3$. **5.** $49x^4y^4z^4$. **6.** $12a^3b - 9ab^2$. **7.** $24a^4 - 27a^3b$. **8.** $x^4y^5z^2 - x^2y^5z^6 + x^4y^2z^6$. **9.** $2x^2 + 3xy - 2y^2$. **10.** $6x^4 - 96$. **11.** $x^4 - 2x + 1$. **12.** $2x^5 - 18x^4 + 39x^3 - 25x^2 + x + 1$.

13. $x^6 + 1008x + 720$. **14.** $x^3 - 9a^2x$.
15. $a^4 + 4a^3x + 4a^2x^2 - x^4$.
16. $x^3 + y^3 + 3xy - 2x - 2y + 1$.
17. $x^5 - 32y^5$. **18.** $x^4 - a^4$.

IX. **1.** $5x^2$. **2.** $-8a^2b^2c^2$.
3. $x^2 - 2x + 4$. **4.** $-a^2 + 4a - 5$.
5. $5a^2b^2 + ab - 4$. **6.** $x^2 + x + 3$.
7. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. **8.** $a^2 + ab - b^2$.
9. $a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4$.
10. $x^2 + 2xy + 3y^2$. **11.** $x^2 - 4x + 8$.
12. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. **13.** $x - c$.
14. $a(b + c) - bc$. **15.** $x + y + z$.

X. **1.** $225x^2 + 420xy + 196y^2$.
2. $49x^4 - 70x^2y^2 + 25y^4$. **3.** $x^4 + 4x^3 - 8x + 4$.
4. $4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 24x + 16$.
5. $x^4 + 2x^3y + x^2y^2 - y^4$. **6.** $x^4 + x^2y^2 + y^4$.
7. $x^4 - x^2y^2 - 2xy^3 - y^4$. **8.** $x^4 - x^2y^2 + 2xy^3 - y^4$.
9. $x^4 - 18x^2 + 81$. **10.** $16x^4 + 96x^3y + 144x^2y^2 - 81y^4$.
11. $a^4x^4 - b^4y^4$.

XI. **1.** $a^2 + b^2 + c^2$. **2.** $a^2 + b^2 + c^2$.
3. $2b(x + y)$. **4.** $2(a + b + c)(x + y + z)$.
5. $b^2 - d^2$. **6.** 6.
7. $a + b + c + d$. **8.** $(x^2 + xy + y^2)^2$.
9. $(x^2 - xy + y^2)^2$. **10.** $a^4 - a^2b^2 + b^4$.
11. $a^4 - b^4$. **12.** $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$.
13. $(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$.
14. $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^4 + 16)$.
15. $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$.

XII. **1.** $4a^2b^2$. **2.** $7a^2b^3x^3y^3$.
3. $3(x + 1)$. **4.** $x - 10$.
5. $x^2 - 6x - 5$. **6.** $x + 3$. **7.** $x^2 - x + 1$.
8. $x^2 - x - 1$. **9.** $x^2 + 1$. **10.** $x + 7$.

XIII. **1.** $36a^3b^2c^3$. **2.** $(a + b)(a - b)^2$.

3. $12ab(a^3 + b^3)$. **4.** $(a + b)(a^3 - b^3)$.
5. $x(2x + 1)(3x - 1)(4x + 3)$.
6. $(x^2 + 3x + 2)(x - 3)(x + 5)$.
7. $(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$.
8. $36a^3b^3c^3$. **9.** $105ab^2(a + b)(a - b)$.
10. $x^8 - 1$. **11.** $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

XIV. **1.** $3x + \frac{4x}{7}$. **2.** $4ac + \frac{4c}{9}$.

3. $x + \frac{2}{x + 3}$. **4.** $x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{2}{x - 1}$.

5. $\frac{4a^2}{3b}$. **6.** $\frac{8(a^2 + b^2)}{3(a + b)}$.

7. $\frac{4x}{3y}$. **8.** $\frac{2(a - b)}{3(a + b)}$. **9.** $\frac{(x^3 - 1)(x + 1)}{x^2 + 1}$.

XV. **1.** $\frac{2a^2x}{3y}$. **2.** $\frac{a + b}{a - b}$. **3.** $\frac{4(a + b)}{5(a - b)}$.

4. $\frac{x + 7}{x - 5}$. **5.** $\frac{x + b}{x + c}$. **6.** $\frac{x - b}{x + c}$.

7. $\frac{x - a}{x^2 - ax + a^2}$. **8.** $\frac{9x^2}{12x^3}, \dots$ **9.** $\frac{4(x - 1)}{4(x^2 - 1)}, \dots$

10. $\frac{a(x^2 + ax + a^2)}{x^3 - a^3}, \dots$ **11.** $\frac{x - c}{(x - a)(x - b)(x - c)}, \dots$

XVI. **1.** $\frac{6a - 6b - c}{4}$. **2.** $\frac{2a}{a^2 - b^2}$.

3. $\frac{a^2 + 2ab - b^2}{a^2 - b^2}$. **4.** $\frac{4a}{a + x}$. **5.** $\frac{b(a + b)}{x^2 - b^2}$.

6. $\frac{2x^2}{x^2 - 1}$. **7.** $\frac{2y^2}{x^3 - y^3}$. **8.** $\frac{48a^3}{(x^2 - a^2(x^2 - 9a^2)}$.

XVII. **1.** $\frac{4c}{5a}$. **2.** 1. **3.** $\frac{1}{(x - 1)(x + 2)}$.

4. $\frac{a^2b^2}{a^2 - b^2}$. **5.** $\frac{(a - c)^2 - b^2}{abc}$.

XVIII. **1.** $\frac{6ay}{bx}$. **2.** $\frac{9c^2x^2}{16a^2z^2}$. **3.** $\frac{1}{x + y}$.

4. $\dfrac{a+x}{x+y}$. 5. $\dfrac{a+b-c}{c+a-b}$. 6. $5x-1$.
7. $\dfrac{(x^2+a^2)(x^4+a^4)}{x^3a^3}$. 8. $\dfrac{x^2+ax+a^2}{ax}$. 9. $\dfrac{x-4}{x-5}$.
10. $\dfrac{x^2-a^2}{x(a+b+c)-bc}$. 11. $x+1$. 12. x.

XIX. 1. $\dfrac{a^2}{b^2}$. 2. 0. 3. $\dfrac{4}{9}$. 4. $2\dfrac{2}{7}$. 5. a.

XX. 1. 6. 2. 9. 3. 21. 4. 2. 5. 5. 6. 6. 7. 2. 8. 96. 9. 24. 10. 120. 11. 6. 12. 5. 13. 1. 14. 6. 15. $1\dfrac{1}{5}$. 16. 11. 17. $5\dfrac{1}{2}$. 18. $1\dfrac{1}{3}$. 19. 10. 20. 12. 21. 5. 22. 2. 23. 4.

XXI. 1. 10. 2. 8. 3. — 7. 4. 16. 5. 5. 6. 7. 7. $1\dfrac{4}{7}$. 8. 1. 9. 2. 10. — 1. 11. $\dfrac{3}{2}$. 12. 20. 13. 3. 14. 5. 15. $a-b$. 16. $a+b$. 17. $2(a+b)$. 18. c. 19. $\dfrac{ab-pq}{a+b+p+q}$. 20. 4. 21. 50. 22. $(a-b)^2$. 23. a.

XXII. 1. 30. 2. 2. 3. 17, 31. 4. 20 Listopada. 5. 52. 6. 36, 27. 7. 28, 32. 8. 103. 9. 8. 10. 36, 12. 11. 24, 76. 12. 21. 13. 840. 14. 30000. 15. 24. 16. 50, 100, 150, 250. 17. 5, 6. 18. 75, 25. 19. 18, 3. 3. 20. 24000.

XXIII. 1. 72. 2. 12, 16. 3. 8, 16. 4. 30. 5. 55, 45. 6. po upływie $18\dfrac{2}{3}$ godz 7. 60. 8. 875, 1125. 9. 20. 80. 10. $5\dfrac{5}{17}$. 11. 240. 12. 24. 13. 60. 14. 25. 15. $49\dfrac{1}{11}$ min. po trzeciej. 16. $32\dfrac{8}{11}$ min. po trzeciej.
17. drugi 16 łut., pokrywka 20 łut.
18. 6,3 metrów sześciennych tlenu i 23,7 metr. sześc. azotu.
19. 256. 20. 50. 21. 300. 22. 63. 23. 84 lata. 24. 1696.
25. 3 drachmy.

26. A jest oddalone od B na 100 mil. Okręt przebył $119\dfrac{11}{19}$ m.
27. 7 mil.
28. po $\dfrac{d}{c'-c}$ jednostek czasu spotkają się. Niemożliwem jest rozwiązanie, gdy d jest różne od 0 i $c'=c$.
29. $\dfrac{d}{c'+c}$ jednostek czasu.
30. po $\dfrac{nc'}{c'-c}$ jednostek czasu.
31. po upływie 17 lub $23\dfrac{1}{2}$ minut.
32. 12 stóp.
33. w wysokości $4\dfrac{11}{20}$ stopy. 34. 8.

XXIV. 1. 10, 7. 2. 20, 10. 3. 2, — 3. 4. 3, 2. 5. 10, 5. 6. 4, 9. 7. $2\dfrac{1}{2}$, 1. 8. 0,2; 0,2. 9. 3, 2. 10. 63, 14. 11. 3, 2. 12. a, b. 13. $\dfrac{ab^2c}{a^2+b^2}$, $\dfrac{a^2bc}{a^2+b^2}$. 14. $\dfrac{1}{a+b}$, 0. 15. 7, 8. 16. $\dfrac{1}{2}(a+b)$, $\dfrac{1}{2}(a-b)$. 17. $\dfrac{a+1}{ab+1}$, $\dfrac{a(b+1)}{ab+1}$.

XXV. 1. 2, 1, 3. 2. 3, 4, 6. 3. 4, 0, 5. 4. 5, — 5, 5. 5. $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{2}{5}$. 6. $x=\dfrac{1}{2}(b+c-a)$, i t. d.
7. $x=\dfrac{1}{2}(b+c)$ i t. d. 8. $x=y=z=\dfrac{abc}{ab+bc+ca}$.
9. $x=a,\ y=b,\ z=c$. 10. $v=3,\ x=4,\ y=5,\ z=2$.
11. 5, 11, 17. 12. $x=b^2-c^2,\ y=c^2-a^2,\ z=a^2-b^2$.
13. $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{3},\ z=\dfrac{1}{4}$.
14. $x=\dfrac{5}{3}a+b+c,\ y=-a+b-c,\ z=\dfrac{7}{3}a-b+c,$
$t=-\dfrac{5}{3}a+b+c$.

XXVI. **1.** 24, 60. **2.** 45, 63. **3.** 4, 8.
4. słupów 24, odległość pomiędzy dwoma najbliższymi 20 st., pomiędzy skrajnymi (24 — 1)20.
5. 14, 10. **6.** $\frac{qs+r}{q+1}$ i $\frac{s-r}{q+1}$. **7.** 4700 rb., $4\frac{3}{4}$%.
8. idzie 4 wiorsty na godz., a płynie 3 wiorsty na godz. z początku.
9. 54,90 kilometrów na godz.
10. $562\frac{1}{2}$, $937\frac{1}{2}$. **11.** 37, 45, 52. **12.** A 2 rb., B 3 rb. 60 kop., C 6 rb. 80 kop., D 13 rb. 20 kop.
13. 70, 42, 35. **14.** $\frac{d(n+m)}{2mn}$, $\frac{d(n-m)}{2mn}$. **15.** $\frac{4}{15}$.
16. 40, 23. **17.** 4500, 5500. **18.** 42. **19.** $\frac{7}{12}$ wiorsty.
20. 90, 72, 60. **21.** 324. **22.** $40\frac{1}{2}$, $34\frac{1}{2}$. **23.** 150, 120, 90. **24.** $3\frac{2}{3}$ rb., 3 rb., $2\frac{1}{3}$ rb. **25.** 120, 80, 40. **26.** 432.
27. 25, 35.

XXVII. **1.** $x < 1$. **2.** $x < -\frac{5}{4}$. **3.** $x < -2\frac{4}{7}$.
4. $x < \frac{20}{147}$.
5. Jeżeli ilość wina jest mniejsza od 1 kwarty.

XXVIII. **1.** $8x^6y^9z^{12}$. **2.** $-8x^6y^6z^9$. **3.** $\frac{64x^3}{27y^6}$.
4. $a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6$. **5.** $2(5x + 10x^3 + x^5)$.
6. $1 - 4x^2 + 6x^4 - 4x^6 + x^8$. **7.** $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$.
8. $1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$.

XXIX. **1.** $3a^2b^2$. **2.** $2ab$. **3.** $-4ab^2$. **4.** $\frac{5ab}{7c^2}$.
5. $-\frac{6ab^3}{5c^2}$. **6.** $4a + 5b$. **7.** $7a^2 - 6b$. **8.** $\frac{3x^2-4}{2x-3}$.
9. $x^2 - 2x - 2$. **10.** $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. **11.** $2x - 3y$.

12. $x^2 - (a+b)x + ab$. **13.** 34. **14.** 123. **15.** 55,5.
16. 70,58. **17.** 0,94868. **18.** 11,35781. **19.** 18,63488.
20. $x - a - b$. **21.** $x^2 - ax - a^2$. **22.** 27. **23.** 138.
24. 0, 604

XXX. **1.** $\frac{1}{3}$. **2.** $\frac{1}{10}$. **3.** 100. **4.** $\frac{1}{27}$. **5.** a^6.
6. a^{-1}. **7.** $a^{\frac{7}{12}}$. **8.** $x^4 + 1 + x^{-4}$. **9.** $a^{-1} - 1$.
10. $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{2}}$. **11.** $x + y$. **12.** $x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$.
13. $x^{\frac{1}{4}} - 2x^{-\frac{1}{4}}$.

XXXI. **1.** $7\sqrt{2}$. **2.** $9\sqrt[3]{4}$. **3.** $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$. **4.** $2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.
5. $2 + \frac{5}{6}\sqrt{6}$. **6.** $4 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$. **7.** $5+2\sqrt{6}$. **8.** $\frac{24-\sqrt{15}}{33}$.
9. $3 + \sqrt{5}$. **10.** $\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$. **11.** $2 + \sqrt{3}$. **12.** $\sqrt{10}$.
13. $a + m$. **14.** n. **15.** $y + x$. **16.** $\sqrt[3]{500}$.
17. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^7}}} = \sqrt[8]{a^7}$ (§ 296). **18.** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
19. $\frac{\sqrt{x^3+x^2\sqrt{y}-xy-y\sqrt{y}}}{x^2-y}$. **20.** $a^{\frac{mr+ns}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr+ns}}$.
21. $2a$. **22.** $\sqrt[3]{a}$.

XXXII. **1.** ± 4. **2.** ± 7. **3.** 1, 2. **4.** $3, -\frac{1}{2}$.
5. $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$. **6.** 4. **7.** 44, -2. **8.** 3, $-\frac{2}{3}$. **9.** 3, -5.
10. -10, $9\frac{25}{29}$. **11.** 5, $1\frac{1}{4}$. **12.** $2\frac{2}{3}$, 0. **13.** $a \pm \frac{1}{a}$.
14. $\pm\sqrt{ab}$. **15.** ± 1. **16.** 0, $a + b$.

XXXIII. **1.** $\pm 2, \pm 3$. **2.** 4. **3.** 3, -2. **4.** ± 3.
5. 1. **6.** $\frac{a-1}{2}$. **7.** $3a^2$. **8.** 0, ± 5.

9. $a, -2a, -2a$. **10.** 196, 49. **11.** 256. **12.** $1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$. **13.** $2, \frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. **14.** $3, \frac{1}{3}, -4, -\frac{1}{4}$.

XXXIV. **1.** 36, 24. **2.** 36, 24. **3.** 30, 24. **4.** 196. **5.** 6, 12. **6.** 126, 96. **7.** 10, 9 w. **8.** 4. **9.** $\frac{d}{\sqrt{c^2 + c_1^2}}$.

10. $52\frac{1}{2}$ m. dług., 35 m. szer.

11. $\frac{1}{2}$ mili lub $\frac{3}{10}$ mili na godzinę.

XXXV. **1.** 5, — 4; 4, —5. **2.** ± 8; ± 6.

3. $4, -\frac{48}{13}; 3, -\frac{41}{13}$. **4.** 6, 0; 5, 0.

5. $\frac{2}{3}, 0; \frac{3}{2}, 0$. **6.** $\frac{a+b}{a}, 0; \frac{a+b}{b}, 0$.

7. $\pm 4, \pm\frac{7}{\sqrt{2}}; \pm 3, \frac{1}{\pm\sqrt{2}}$. **8.** ± 9; ± 4. **9.** ± 9; ± 3.

10. 5, 4; 4, 5. **11.** $\pm 4, \pm 3; \pm 3, \pm 4$. **12.** ± 5; ± 3.

13. $x = a : \sqrt[4]{(abc)}$; i t. d. **14.** ± 1; ± 2; ± 3.

XXXVI. **1.** 10, 15. **2.** 5, 3. **3.** 7, 4. **4.** 20, 15 dla pierwszego. **5.** 756, 36, 27.

6. $4\frac{1}{2}$ w. idzie na godz., $4\frac{1}{2}$ w. przepływa pod wodę.

7. 343 centym. sześc. i 64 cent. sześc.

8. 3 metry 4,2 metra.

9. 100, 80, 60 metr. Oznaczając przez x przeciwprostokątną, przez y i z przyprostokątne, równania będą:

$$x^2 = y^2 + z^2; \left(y + \frac{1}{2}x\right) : \left(z + \frac{1}{2}x\right) = 13 : 11;$$

$$\left(\frac{1}{2}x + z + 20\right) : \left(\frac{1}{2}x + y - 20\right) = 13 : 11.$$

10. Bachus w 6 godz., Sylen w 3 godz. Równania:

$$\frac{2}{3}y + \left(1 - \frac{2y}{3x}\right)y - 2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2y}{3x}\right)x;$$

$$y : x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2y}{3x}\right) : \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{3x}\right).$$

XXXIX. **1.** *a)* 1, 2, 3, 2, 3; *b)* 1, 2, 1, 1, 1, 55; *c)* 3, 7, 1, 2, 4, 5, 1, 2.

3. *a)* 1, 4, 3, 1, 3, 1, 1, 2, 5; *b)* 1, 39, 1, 1, 111, 1, 2, 1, 2; *c)* 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 29.

4. *a)* $\frac{972}{157}$; *b)* $\frac{421}{157}$; *c)* $\frac{421}{59}$.

5. *a)* 3, 3, 6, 3, 6...; *b)* 6, 1, 2, 2, 2, 1, 12...; *c)* 7, 1, 2, 7, 2, 1, 14.

6. $\frac{1520}{273}$.

7. *a)* $\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{\frac{5}{3}}$; *c)* pierwiastek dodatni równania $x^2 + 2x - 2 = 0$; *d)* pierwiastek dodatni równania $7x^2 - 8x - 3 = 0$.

8. 6, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12, 1, 1...;
7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14, 1....

11. Jeżeli wartość $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} = \frac{P_4}{Q_4}$, a poprzednie przybliżenie oznaczymy $\frac{P_3}{Q_3}$, to:

$$a_4 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}} = \frac{P_4}{P_3} \text{ i t. d.}$$

12. Jeżeli wartość ułamka 1) oznaczymy przez $\frac{P_n}{Q_n}$, a przybliżenie poprzedzające przez $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, wtedy wartość ułamka 2) będzie $\frac{P_n}{P_{n-1}}$. Gdyż $P_n = P_{n-1}a_n + P_{n-2}$,

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}\right)};$$

a że: $P_{n-1} = P_{n-2}a_{n-1} + P_{n-3}$,

przeto: $\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}$,

skąd: $\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{P_{n-3}}{P_{n-2}}}$ i t. d.

13. $\frac{1}{12}, \frac{2}{25}, \frac{3}{37}, \frac{8}{99}, \frac{11}{136}, \frac{19}{235}, \frac{334}{4131}$.

14. $x^2 - x - 1 = 0$; $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}$, i t. d.

XL. **1.** *a*) $x = 2, y = 1$; *b*) $x = 4, y = 5$;
c) $x = 90, y = 0$; *d*) $x = 4, y = 8$.
2. *a*) $x = 7, y = 5$; *b*) $x = 11, y = 18$.
3. *a*) $x = 2, y = 17$; *b*) $x = 17, y = 7$;
c) $x = 2, y = 1$; *d*) $x = 145, y = 203$.
4. *a*) $x = 1, 2, 3$; $y = 6, 4, 2$; $z = 5, 6, 7$.
b) $x = 7, y = 8, z = 9$; *c*) niema rozwiązań.
5. $x = 15, y = 3, z = 1$ i t. d..
6. 185, 15; 119, 81; 53, 147. **7.** $105p + 104$.
8. $\frac{2}{5}, \frac{7}{13}, \dots$ **9.** 45, 30, 15; 4, 12, 20. **10.** 785.
11. Mężczyzn: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5;
kobiet: 1, 4, 7, 2, 5, 3, 1, 2;
dzieci: 15, 8, 1, 10, 3, 5, 7, 2.

XLI. **1.** 936. **2.** $139\frac{1}{2}$. **3.** -115. **4.** 14, 16, 18.

5. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots$ **6.** 82. **7.** 1, 2, 3, 4, 5. **8.** 1, 2.

9. $b = \frac{u - r}{q - p}$; $a = \frac{r(q-1) - u(p-1)}{q - p}$;

$$l = \frac{u(n-p) - r(n-q)}{q-p};$$

$$s = \frac{2(qr - pu) + (n+1)(u - r)}{q - p} \cdot \frac{n}{2}.$$

10. 210. **11.** 27.

XLII. **1.** 1365. **2.** $63(\sqrt{2} + 1)$. **3.** $\frac{3}{4}$. **4.** $4\frac{1}{2}$.

5. $\frac{5}{33}$. **6.** $\frac{557}{1980}$. **7.** 8, 12, 18, 27. **8.** 3, 6, 12.

9. $s = 2047\frac{7}{8}$, $r = 2$. **10.** $\frac{x^{10} - y^{10}}{x - y}$.

11. 18,446,744,073,709,551,615 ziarn. Dla wyrażenia tego w korcach można przyjąć, że kilogram pszenicy ma około 20,000 ziarn, a korzec waży 100 kilogramów.

XLIII. **9.** 0,015196. **10.** 0,27999. **11.** 0,001885.
12. 1,0218. **13.** 0,6789. **14.** 0,7699. **15.** 1,3987.
21. $x = 20$; $y = 5$.

XLIV. **1.** 71819 rb. **2.** 9398 rb. 10 kop. **3.** 5,24%.
4. Po 27 latach. **5.** 24,959. **6.** 2089 rb. **7.** 674 rb. 23 kp.

XLV. **1.** 134596. **2.** 5040. **3.** 126. **4.** 1900. **5.** 27.
6. $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$. **7.** $10! - 9! = 3265920$.

XLVI. **1.** $a^{13} - 13a^{12}x + 78a^{11}x^2 \dots - 78a^2x^{11} + 13ax^{12} - x^{13}$.
2. $1 - 14y + 84y^2 - 280y^3 + 560y^4 - 672y^5 + 448y^6 - 128y^7$.

3. $1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$.

4. $x = 2,\ y = 3,\ n = 5$.

5. $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$

6. $a^{-\frac{10}{3}} + 10a^{-\frac{13}{3}}b + 65a^{-\frac{16}{3}}b^2 + \frac{1040}{3}a^{-\frac{19}{3}}b^3 +$

$+ \frac{4940}{3}a^{-\frac{22}{3}}b^4$.

KONIEC.

643/79 24,-